Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
M. Sc. S. Avramska

SS 2012
04.07.2012

Funktionentheorie
Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (C) (10 Punkte)

Die Funktion f ist gegeben durch

$$f(z) := \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}\,.$$

Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung von f

(a) im Kreisring $1 < |z| < 3$;

(b) im Kreisring $1 < |z-2| < 3$.

Aufgabe 2 (C) (10 Punkte) Die Funktion f ist gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

Entwickeln Sie $f'(z)$ in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ und in $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

Aufgabe 3 Seien $f_0 = f_1 = 1$ und $f_n := f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$. Zeigen Sie

(a) Durch $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ wird die rationale Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$$

definiert.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}.$$

Aufgabe 4 Die Besselschen Funktionen $J_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{Z}$) werden folgendermaßen definiert: Für $a \in \mathbb{C}$ betrachten wir die in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion $z \mapsto \exp[(a/2)(z - 1/z)]$ und entwickeln sie um $z_0 = 0$ in eine Laurentreihe. Den Funktionswert $J_n(a)$ definieren wir dann als den Koeffizienten von z^n in dieser Reihe. Beweisen Sie die Darstellung

$$J_n(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(a \sin t - nt)\,dt \qquad (n \in \mathbb{Z},\ a \in \mathbb{C})\,.$$