Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
M. Sc. S. Avramska

SS 2012
11.07.2012

Funktionentheorie
Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (C) (10 Punkte) Bestimmen Sie jeweils Art und Lage sämtlicher isolierter Singularitäten der Funktion f.

(a) $f(z) := \dfrac{z}{z^2 - z - 12}$ (b) $f(z) := \dfrac{1}{(z^2+4)^2}$

(c) $f(z) := \dfrac{\sin z - z}{z^3}$ (d) $f(z) := \dfrac{e^{1/z}}{(z-1)^2}$

Geben Sie bei **d)** noch den Koeffizienten a_{-1} in der Laurent-Entwicklung um $z_0 = 0$ an.

Aufgabe 2

(a) Es sei z_0 ein Pol der Ordnung $m \geq 1$ von $f \in H(D \setminus \{z_0\})$. Berechnen Sie $Res(f'; z_0)$.

(b) Es sei $f \in H(D \setminus \{z_0\})$ und f' habe in z_0 einen Pol der Ordnung k. Zeigen Sie: Dann gilt $k \geq 2$ und f hat in z_0 einen Pol der Ordnung $k-1$.

Aufgabe 3 Es sei f holomorph für $0 < |z - z_0| < r$. Zeigen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) z_0 ist Pol N-ter Ordnung

(b) Es gibt $C_1, C_2 > 0$, $\rho < r$ mit

$$\frac{C_1}{|z-z_0|^N} \leq |f(z)| \leq \frac{C_2}{|z-z_0|^N}, \quad 0 < |z-z_0| < \rho$$

(c) Für ein $\rho < r$ gilt: f ist nullstellenfrei in $0 < |z - z_0| < \rho$, $\frac{1}{f}$ ist holomorh in z_0 und hat in z_0 eine N-fache Nullstelle.

Aufgabe 4 (C) (10 Punkte) Berechnen Sie den Wert der folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes.

(a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2+1} dz$ (b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z}{e^{iz}-1} dz$

(c) $\displaystyle\int_{|z|=2} \exp\left(\frac{z}{1-z}\right) dz$ (d) $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{z}{\cosh z - 1} dz$

Dabei sei γ der positiv orientierte Rand von $G := \{\, x + iy \mid y^2 < (4\pi^2 - 1)(1 - x^2) \,\}$.