Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
M. Sc. S. Avramska

SS 2012
24.04.2012

# Funktionentheorie
## Übungsblatt 2
## Abgabe bis Mittwoch, den 2. Mai 2012, 13:30 Uhr

**Aufgabe 1** (C) (10 Punkte) Es seien $a, z \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$. Zeigen Sie

(a) $|z-a| < |1-\bar{a}z| \Leftrightarrow |z| < 1$;

(b) $|z| \leq 1 \Rightarrow \frac{\big||z|-|a|\big|}{1-|az|} \leq \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|$.

**Aufgabe 2** (C) (10 Punkte)

(a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen im Punkt 0 stetig sind:

$$\begin{aligned} &f_k(0) = 0 \quad \text{for } k = 1,2,3,\\ &f_1(z) = z^{-1} Im z\\ &f_2(z) = z^{-1} Im(z^2)\\ &f_3(z) = z^{-1}(Im(z^2))^2 \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit den beiden Eigenschaften gibt

$$\begin{aligned} f(zw) &= f(z)f(w) \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}\setminus\{0\},\\ (f(z))^2 &= z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}. \end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit der Eigenschaft $(f(z))^2 = z$ für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ gibt.

**Aufgabe 3** Beweisen Sie

(a) $\pi : \Sigma \to \hat{\mathbb{C}}$ bildet Kreise auf $\Sigma$ auf Kreise oder Geraden in $\hat{\mathbb{C}}$ ab.

(b) $p = \pi^{-1}$ bildet Kreise oder Geraden in $\hat{\mathbb{C}}$ auf Kreise auf $\Sigma$ ab.

**Aufgabe 4** Zeigen Sie, dass durch

$$d(z,w) := 2\frac{|z-w|}{\sqrt{|z|^2+1}\sqrt{|w|^2+1}}, \quad z, w \in \hat{\mathbb{C}}$$

eine Metrik auf $\hat{\mathbb{C}}$ definiert wird.