Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
M. Sc. S. Avramska

SS 2012
02.05.2012

Funktionentheorie
Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (C) (10 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen alle Punkte, in denen die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind. Bestimmen Sie ggd. die Ableitung f'.

(a) $f(x+iy) := x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - x^2 + y^2 + i(4x^3y - 4xy^3 - 2xy)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$;

(b) $f(x+iy) := \cosh(x)\cos(y) + i\sinh(x)\sin(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$;

(c) $f(x+iy) := x(x^2 - 2y^2) + iy(2x^2 - y^2)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$;

(d) $f(x+iy) := \sin(x)\sin(y) - i\cos(x)\cos(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Hinweis zu b): $\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2 (C) (10 Punkte) Sei $D \subset M \subset \mathbb{C}$. Weiter sei D diskret in M, d.h. D habe in M keine Häufungspunkte. Zeigen Sie:

(a) $D^\circ = \emptyset$;

(b) D ist abzählbar;

(c) D ist genau dann endlich, wenn D kompakt ist;

(d) D ist diskret in sich, aber im Allgemeinen nicht in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3

(a) Sei $A \subset \mathbb{C}$. Beweisen Sie, dass für $z \in \mathbb{C}$ die Abbildung $z \mapsto dist(A, \{z\})$ stetig ist;

(b) Seien $A \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen und $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Beweisen Sie, dass es $z_0 \in A$ und $w_0 \in K$ mit $dist(A, K) = |z_0 - w_0|$ gibt.

Aufgabe 4 Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass für alle $U, V \subseteq B$

(a) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$;

(b) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$;

(c) $f^{-1}(U \setminus V) = f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(V)$

gelten.