Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
M. Sc. S. Avramska

SS 2012
08.05.2012

Funktionentheorie
Übungsblatt 4

Aufgabe 1 Beweisen Sie, dass obwohl die Funktion

$$f(z) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllt, ist jedoch nicht in ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar.

Aufgabe 2 Konstruieren Sie zu den folgenden gegebenen harmonischen Funktionen jeweils eine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit dem gegebenen Realteil u oder Imaginärteil v:

(a) $D = \mathbb{C}$ und $u : D \to \mathbb{R}$ mit $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1$;

(b) $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $u : D \to \mathbb{R}$ mit $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$;

(c) $D = \mathbb{C}$ und $v : D \to \mathbb{R}$ mit $v(x, y) = e^x(x \sin(y) + y \cos(y))$;

Aufgabe 3 (C) (10 Punkte) Für jedes $c \in \mathbb{C}$ sei die (komplexwertige) Folge $\{a_n^{(c)}\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ definiert durch

$$a_0^{(c)} := 0, \qquad a_{n+1}^{(c)} := (a_n^{(c)})^2 + c \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Weiter sei $M := \{c \in \mathbb{C} : \{a_n^{(c)}\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \text{ ist beschränkt}\}$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt $c \in M$ so, dass die Folge $\{a_n^{(c)}\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ nicht konvergent ist;

(b) Sei $c \in \mathbb{C}$ fest. Gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_N^{(c)}| > 2$, dann ist die Folge $\{a_n^{(c)}\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ unbeschränkt;

(c) M ist kompakt;

Hinweis: Sie dürfen ohne Begründung verwenden, dass für ein Polynom P (mit komplexwertigen Koeffizienten) die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |P(z)| > 2\}$ offen ist.

(d) $\max\{|c| : c \in M\} = 2$.

Aufgabe 4 (C) (10 Punkte) Es sei $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z_k \geq 0$, und die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} z_k^2$ seien konvergent. Zeigen Sie, dass dann $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2$ konvergiert, und geben Sie ein Beispiel an, für das unter obigen Voraussetzungen $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ nicht konvergiert.