Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
M. Sc. S. Avramska

SS 2012
15.05.2012

Funktionentheorie
Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (C) (10 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5+i}{4-2i}\right)^n \qquad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2i}\right)^n \left(1+\frac{i}{n}\right)^{n^2} \qquad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$$

(b) Zeigen Sie, dass $|\sin z|^2 = \sin^2(Rez) + \sinh^2(Imz)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, und finden Sie dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|\sin(in)| > 42$.

Aufgabe 2 Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} (1+ni)^n z^n \qquad \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} (in^2+2^n) z^{2n}$$

$$\text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} (1+i^n)^{(n+1)/2} z^n \qquad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k+i}\Big) z^n$$

Aufgabe 3 Beweisen Sie:

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}\right) = 1+z \quad \text{für } \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

Aufgabe 4 (C) (10 Punkte)

(a) Untersuchen Sie, ob es eine Möbiustransformation S gibt, für die gilt:

$$S(0) = -2\,, \quad S(2) = 0\,, \quad S(i) = \infty \quad \text{und} \quad S(\infty) = -i$$

(b) Gibt es eine Möbiustransformation T, die den folgenden Bedingungen genügt?

$$T(1) = i\,, \quad T(i) = 1\,, \quad T(0) = \infty \quad \text{und} \quad T(3i) = 0.$$

(c) Bestimmen Sie, falls die Möbiustransformation existiert, jeweils ihre Umkehrabbildung sowie die Fixpunkte (also alle $z \in \hat{\mathbb{C}}$ mit $S(z) = z$ bzw. $T(z) = z$).