Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
M. Sc. S. Avramska

SS 2012
29.05.2012

Funktionentheorie
Übungsblatt 7
Abgabe bis Mittwoch, den 6. Juni 2012, 13:30 Uhr

Aufgabe 1 Gegeben sind zwei Kreise ohne gemeinsamen Punkt. Begründen Sie, dass diese Konstellation mittels einer Möbiustransformation

(a) auf einen Kreis und eine Gerade, die sich nicht schneiden

(b) auf zwei konzentrische Kreise

abgebildet werden kann.

Aufgabe 2 (C) (10 Punkte)

(a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:
(a) $(1+i)^i$ (b) $i^{\frac{1}{i}}$ (c)$(log(i))^i$ (d) $i^{(i^i)}$

(b) Beweisen Sie, dass der Hauptzweig der allgemeinen Exponentialfunktion $z \mapsto a^z$ (mit $a \neq 0$) die Ableitung $z \mapsto a^z log\, a$ hat.

Aufgabe 3 Es seien $z \in \mathbb{C}$ und $\rho \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass für $|z-1| \leq \rho < 1$ es gilt

$$|log(z)| \leq \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Aufgabe 4 (C) (10 Punkte)

(a) Skizzieren Sie den folgenden Weg und berechnen Sie die Weglänge:

$$\gamma(t) := \begin{cases} i + t(-1-i), & 0 \leq t < 1 \\ -1 - i(t-1), & 1 \leq t < 2 \\ -1 + e^{4\pi i(t-2) - i\frac{\pi}{2}}, & 2 \leq t < 3 \\ \sqrt{2} e^{\pi i(t-3) - i\frac{3\pi}{4}}, & 3 \leq t < 4 \end{cases}$$

(b) Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale

(1) $\int_\gamma \frac{1}{z} dz$, $\gamma(t) = e^{int}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ $(n \in \mathbb{N})$

(2) $\int_\gamma \bar{z}^2 dz$, γ die Verbindungsstrecke von 0 nach $1+i$

(3) $\int_\gamma \bar{z}^3 dz$, γ der Streckenzug $[0, 1, i+1]$

(4) $\int_{\gamma_a} \frac{1}{z-z_0} dz$, γ_a der Streckenzug $[z_0 - a - ia, z_0 + a - ia, z_0 + a + ia, z_0 - a + ia, z_0 - a - ia]$ mit $a \in \mathbb{R}$.