A1 Wir betrachten den Fall:

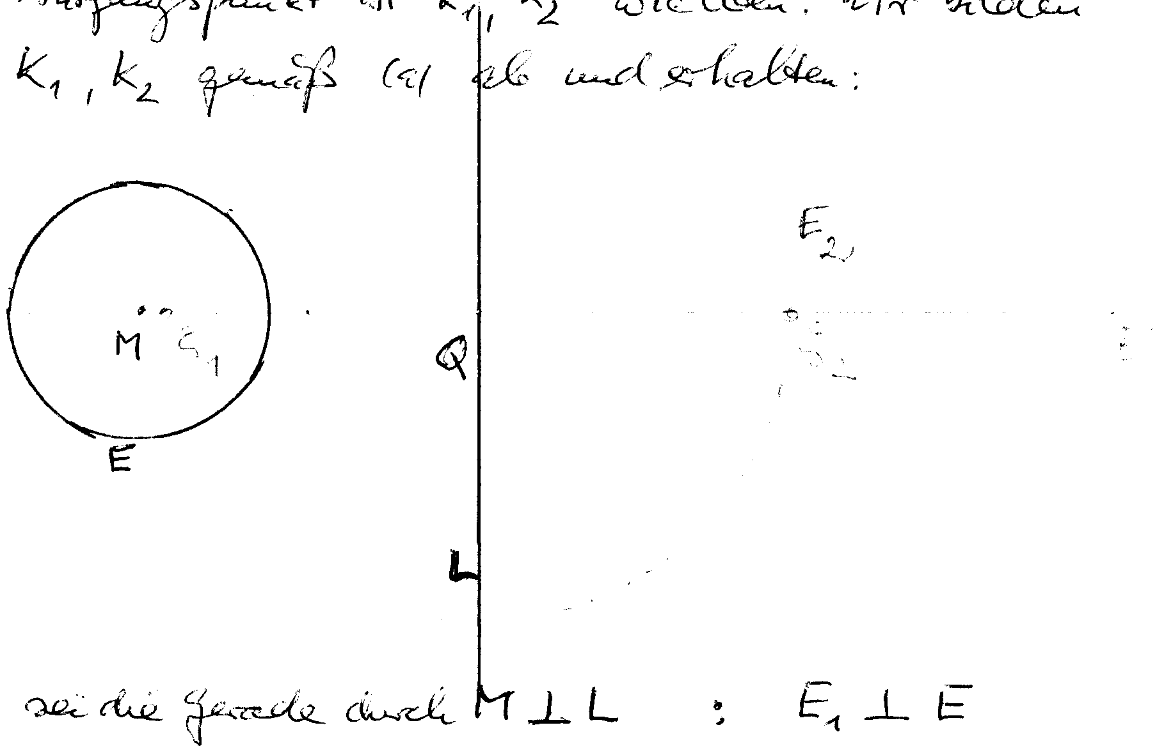
(a)

Wähle z_0 etwa auf k_2, so leistet

$$T(z) = \frac{1}{z - z_0} \quad \text{das Geforderte.}$$

$T(k_1) = E$ ist Kreis, $T(k_2) = L$ ist eine Gerade, die E nicht schneidet.

(b) Ausgangspunkt ist k_1, k_2 wie oben. Wir bilden k_1, k_2 gemäß (a) ab und erhalten:



E_1 sei die Gerade durch $M \perp L$: $E_1 \perp E$

E_2 sei der Kreis um $Q \perp E$: $E_2 \perp E$

$$E_1 \cap E_2 = \{\xi_1, \xi_2\}.$$

Es gelten: $\xi_1 = \rho_E(\xi_2) = \rho_L(\xi_2)$ (Begründen!)

$$S(z) := \frac{z - \xi_1}{z - \xi_2}$$ bildet E und L auf konzentrische Kreise um 0 ab.

$S \in \mathcal{M}$

Begründung: $\xi_2 \notin E$ und $\xi_2 \notin L$, $S \in \mathcal{M}$

$\Rightarrow$ $S(E)$ und $S(L)$ sind Kreise, $S(E) \cap S(L) = \emptyset$

$S(\xi_1) = 0$, $S(\xi_2) = \infty$ sind (Satz 10/6. Kapitel/ Symmetrieprinzip) spiegelbildlich zu $S(E)$ und zu $S(L)$. Das geht nur, wenn $S(E)$ und $S(L)$ konzentrische Kreise mit dem gemeinsamen Mittelpunkt 0 sind.

A2 Es ist im folgenden log der Hauptzweig des Logarithmus:

$$\log(z) = \ln|z| + i\arg(z), \quad -\pi < \arg(z) < \pi, \; z \neq 0$$

und $a^b = e^{b\log(a)}$, $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$

(a)

(a) $\underline{(1+i)^i}$ $\quad a = 1+i$, $|a| = \sqrt{2}$, $\arg(a) = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \log(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow (1+i)^i = e^{i\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}}$$

$\underline{\mathrm{Re}(1+i)^i = e^{-\frac{\pi}{4}}\cos(\ln\sqrt{2})}$, $\underline{\mathrm{Im}(1+i)^i = e^{-\frac{\pi}{4}}\sin(\ln\sqrt{2})}$

(b) $\underline{i^{\frac{1}{i}}} = i^{-i}$

$\log(i) = \ln|i| + i\arg(i) = i\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow i^{\frac{1}{i}} = e^{-i\log(i)} = \underline{e^{\frac{\pi}{2}} = \mathrm{Re}(i^{\frac{1}{i}})}$, $\underline{0 = \mathrm{Im}(i^{\frac{1}{i}})}$

(c) $\underline{(\log(i))^i}$

Mit $\log(i) = i\frac{\pi}{2}$ aus (b): $\log(\log(i))$

$$= \ln|\log i| + i\arg(\log i)$$

$$= \ln\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}$$

Also $(\log i)^i = e^{i \ln\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}$

$\underline{\mathrm{Re}(\log i)^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \cos \ln\frac{\pi}{2}}$, $\underline{\mathrm{Im}(\log i)^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \sin \ln\frac{\pi}{2}}$

(d) $\underline{i^{(i^i)}}$

Wegen ((b)) gilt $\log i = i\frac{\pi}{2}$, also $i^i = e^{i\,i\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$

also $i^{(i^i)} = i^{(e^{-\frac{\pi}{2}})} = \exp(e^{-\frac{\pi}{2}} \log i) = \exp(e^{-\frac{\pi}{2}}\, i\frac{\pi}{2})$

$= \underline{\cos(\tfrac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi}{2}})} + i\,\underline{\sin(\tfrac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi}{2}})}$

(b) $f(z) = a^z = e^{z \log(a)}$, $a \neq 0$

Kettenregel: $f'(z) = a^z \log(a)$

<u>A3</u> Nach Ü5/A3 und Vorlesung gilt:

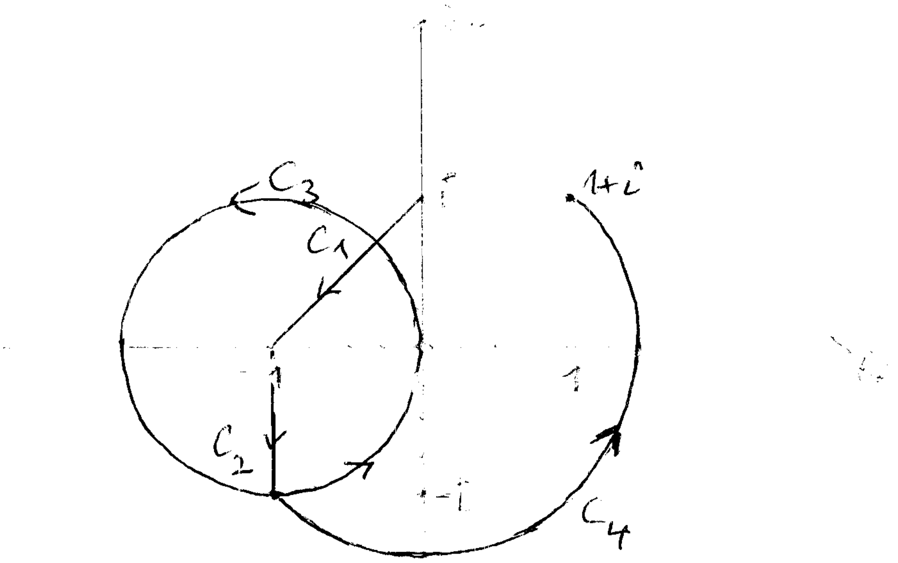
$$\log(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}, \quad |z-1| < 1$$

Für $|z-1| \leq \rho < 1$ folgt:

$$|\log z| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Gleichheit gilt nur für $\rho = 0$, d. h. für $z = 1$.

A4 (a)



$C = C_1 + C_2 + C_2 + C_3 + C_4$:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) = i + t(-1-i), & 0 \le t < 1, \\ \gamma_2(t) = -1 - i(t-1), & 1 \le t < 2, \\ \gamma_3(t) = -1 + \exp(4\pi i(t-2) - i\frac{\pi}{2}) & 2 \le t < 3 \\ \gamma_4(t) = \sqrt{2}\exp(\pi i(t-3) - i\frac{3\pi}{4}) & 3 \le t < 4 \end{cases}$$

Die Längen liest man aus der Geometrie ab.

$$l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2) + l(\gamma_3) + l(\gamma_4)$$
$$= \underline{\sqrt{2} + 1 + 4\pi + \pi\sqrt{2}}$$

(b) (1)
$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} e^{-int}\, i n e^{int}\,dt = \underline{n 2\pi i}$$

(2) $\gamma(t) = t(1+i)$, $0 \le t \le 1$

$$\underline{\int_\gamma \bar{z}^2\,dz} = \int_0^1 t^2(1-i)^2(1+i)\,dt = \underline{\frac{2}{3}(1-i)}$$

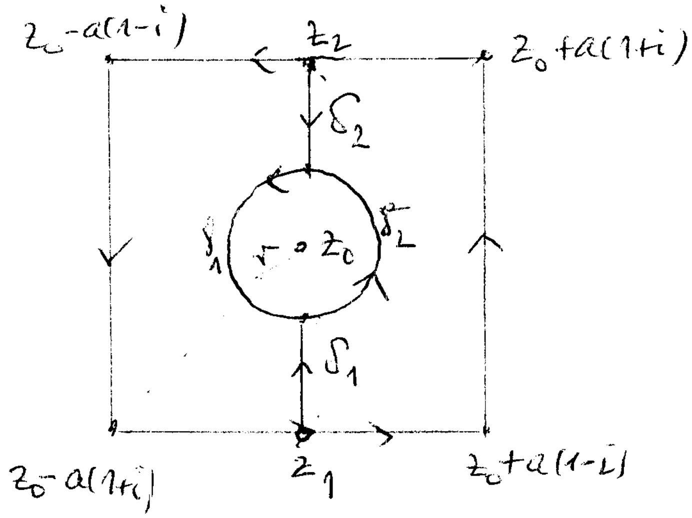
(3) $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ $\quad \gamma_1: \gamma_1(t) = t$, $0 \le t \le 1$

$\gamma_2: \gamma_2(t) = 1 + it$, $0 \le t \le 1$

$$\underline{\int_\gamma \bar{z}^3\,dz} = \int_0^1 t^3\,dt + \int_0^1 (1-it)^3 i\,dt = \underline{\frac{3}{2}}$$

-5-

(4)

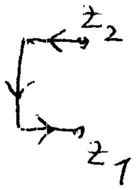


$(a > 0)$

$a < 0$ als zusätzliche Übung

$$\begin{cases} \gamma : \gamma(t) = z_0 + re^{it}, \quad \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{5\pi}{2} \\ \gamma = \gamma_1 + \gamma_2, \quad \gamma_1(t) = z_0 + re^{it}, \quad \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2} \\ \qquad\qquad\qquad \gamma_2(t) = z_0 + re^{it}, \quad \frac{3\pi}{2} \le t \le \frac{5\pi}{2} \end{cases}$$

$\gamma_a^{(1)}$: 

, $\gamma_a^{(2)}$: 

$\gamma_a = \gamma_a^{(1)} + \gamma_a^{(2)}$

Betrachte $\varphi_1 = \gamma_a^{(1)} + \delta_2 - \gamma_2 - \delta_1$

und $\varphi_2 = \gamma_a^{(2)} + \delta_1 - \gamma_1 - \delta_2$

Es ist $\varphi_1 + \varphi_2 = \gamma_a - \gamma$

Wegen $\displaystyle\int_{\varphi_1} \frac{dz}{z - z_0} = \log(\varphi_1(t) - z_0)\Big|_{z_1}^{z_1} = 0$

$$\int_{\varphi_2} \frac{dz}{z - z_0} = 0 \quad \text{analog}$$

folgt: $\displaystyle 0 = \oint_{\gamma_a} \frac{dz}{z - z_0} - \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \Rightarrow \underline{\oint_{\gamma_a} \frac{dz}{z - z_0}} = \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$

$\displaystyle \left(\text{mit } \gamma(t) - z_0 = re^{it}, \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{5\pi}{2}\right) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\, dt = \underline{2\pi i}$