Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
M. Sc. S. Avramska

SS 2012
05.06.2012

Funktionentheorie
Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (C) (10 Punkte) Berechnen Sie den Wert der folgenden Wegintegrale:

(a) $\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos(\pi z)}{z}\,dz$ (b) $\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}\,dz$

(c) $\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2+2z}\,dz$ (d) $\int\limits_{|z|=1} \frac{z^3}{z^2+4}\,dz$

Der Integrationsweg soll dabei jeweils die *positiv* orientierte Kreislinie sein.

Aufgabe 2 Es sei $R > 0$, und die Wege γ_1, γ_2 und γ_3 seien gegeben durch die Parametrisierungen

$$z_1(t) = t\,, \qquad z_2(t) = R + it\,, \qquad z_3(t) = t(1+i)\,, \qquad \text{jeweils mit } 0 \le t \le R\,.$$

(a) Beweisen Sie $\displaystyle\int_{\gamma_3} e^{-z^2}\,dz = \int_{\gamma_1} e^{-z^2}\,dz + \int_{\gamma_2} e^{-z^2}\,dz\,.$

(b) Zeigen Sie mittels geeigneter Abschätzungen $\displaystyle\int_{\gamma_2} e^{-z^2}\,dz \xrightarrow{R\to\infty} 0\,.$

(c) Berechnen Sie nun den Wert der sogenannten *Fresnelschen Integrale*

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx\,,$$

indem Sie den Grenzübergang $R \to \infty$ betrachten und dabei ohne Beweis die Gleichung $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ verwenden.

Aufgabe 3 (C) (10 Punkte)

(a) Es sei p ein Polynom und γ_R sei die positiv orientierte (d. h. einmal entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufene) Kreislinie $|z| = R$, mit $R > 0$. Zeigen Sie

$$\int_{\gamma_R} \overline{p(z)}\,dz = 2\pi i\,R^2\,\overline{p'(0)}\,.$$

(b) Die Kurve γ sei durch die Parametrisierung $\gamma(t) = e^{it}\sin t$ $(0 \le t \le \frac{\pi}{2})$ gegeben. Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma \cos z\,dz$ sowie die Weglänge von γ.

(c) Berechnen Sie den Wert der zwei reellen Integrale

$$\int_0^{2\pi} e^{-\sin t}\cos(t+\cos t)\,dt \qquad \text{und} \qquad \int_0^{2\pi} e^{-\sin t}\sin(t+\cos t)\,dt\,,$$

indem Sie eine geeignet gewählte Funktion längs der Einheitskreislinie integrieren.