Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
M. Sc. S. Avramska

SS 2012
13.06.2012

Funktionentheorie
Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (C) (10 Punkte) Die Potenzreihe $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ konvergiere für $|z| < 1$.

(a) Entwickeln Sie die Funktion g, die gegeben ist durch

$$g(z) := \frac{f(z)}{1-z}$$

in eine Potenzreihe um $z_0 = 0$, und bestimmen Sie $g^{(n)}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Rechnen Sie nach: Für $0 < r < 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{f(z)}{(1-z)z^{n+1}}\, dz = \sum_{k=0}^{n} a_k .$$

(c) Berechnen Sie nun für $r \in (0,1)$ die Integrale

$$\int\limits_{|z|=r} \frac{e^z}{(1-z)z^3}\, dz \qquad \text{und} \qquad \int\limits_{|z|=r} \frac{e^z}{(1-z)^2 z^3}\, dz\,.$$

Bei **b)** und **c)** wird wieder entlang der *positiv* orientierten Kreislinie integriert.

Aufgabe 2 (C) (10 Punkte)

(a) G sei Gebiet, $f \in H(G)$. C sei geschlossener doppelpunktfreier Weg, der mit seinem Innergebiet in G liegt. Es sei $f \neq konst$. Begründen Sie, dass C nur enlich viele c-Stellen von f umschließt.

(b) $f(z) = \sin\left(\frac{1}{1-z}\right)$ ist in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ holomorph. Berechnen Sie alle Nullstellen.

Aufgabe 3 Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Liouville: Die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann ein Polynom mit Grad $\leq n$, wenn positive Konstanten a und b existieren mit

$$|f(z)| \leq a + b|z|^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\,.$$

Aufgabe 4

(a) Mit Hilfe von Satz 4 (Kapitel 10.4) geben Sie einen weiteren Beweis für das Maximum Prinzip:
Es sei G ein Gebiet, $f \in H(G)$. Dann gilt: Besitzt $|f|$ in $z_0 \in G$ ein lokales Max, so ist f konstant.

(b) Zeigen Sie: Hat $|f|$ in z_0 ein lokales Min, so gilt $f(z_0) = 0$ oder $f \equiv konst$.