Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
M. Sc. S. Avramska

24. Juli 2012

Prüfung
Funktionentheorie
SS 2012

Name:				
Matrikelnummer:				
Studiengang:	☐ Diplom	☐ Bachelor	☐ Master	☐ Lehramt
	☐ Math	☐ Phys	☐ Info	☐ ________
Semester:				

Wichtige Hinweise:

- Bitte füllen Sie den obigen Kasten auf diesem Deckblatt aus.
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis zur Kontrolle bereit.
  Schalten Sie sämtliche Telekommunikationsgeräte (z.B. Handys) aus.
- Tragen Sie auf jedes Bearbeitungsblatt Ihren Namen und Matrikelnummer ein. Falls Sie zusätzliche Blätter verwenden, schreiben Sie auf jedes lose Blatt Ihren Namen und die Nummer derjenigen Aufgabe, die Sie auf diesem Blatt bearbeiten.
- Diese Klausur enthält 6 Aufgaben. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.
- Zur Bearbeitung der Klausur stehen Ihnen 120 Minuten zur Verfügung. Außer Schreibsachen und zwei selbsterstellten DIN A4-Blättern (beidseitig beschrieben, insgesamt vier Seiten) sind keine Hilfsmittel erlaubt. Lesen Sie die Aufgabenstellung genau durch, bevor Sie mit der Bearbeitung einer Aufgabe beginnen.
- Verwenden Sie keine Bleistifte und keine rote Farbe.

  Doppelbearbeitungen werden nicht korrigiert! Streichen Sie ungültige Lösungswege.
- Es können maximal 36 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen der Klausur sind 12 Punkte hinreichend.

Wird vom Korrektor ausgefüllt:

Blätter	1	2	3	4	5	6	$\sum$
							/36

Note:

Aufgabe 1 (2 + 4 Punkte)

Name:
Matrikelnummer:

(a) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $u, v : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Untersuchen Sie jeweils, ob holomorphe Funktionen $f = u + iv$ existieren mit

(1) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad f(1) = 0;$

(2) $u(x, y) = \exp(\frac{y}{x}), \quad f(i) = 0.$

(b) Falls ja, bestimmen Sie $f = f(z)$.

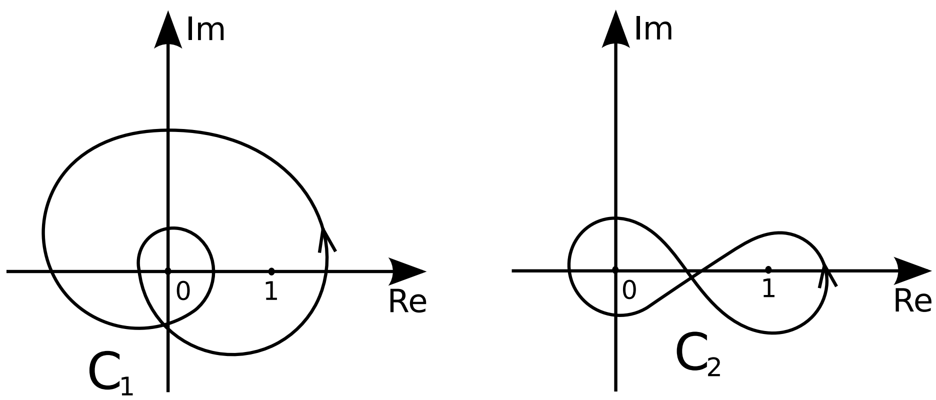
Aufgabe 2 (4 + 2 Punkte)

Name:
Matrikelnummer:

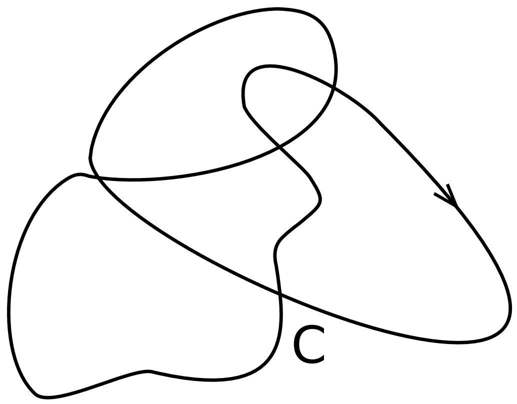
(a) Berechnen Sie die Integrale

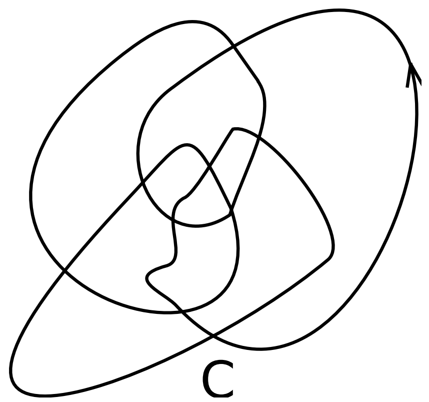
$$I_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_k} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz \quad (k = 1, 2)$$

mit



(b) Geben Sie (ohne Begründung) jeweils für den skizzierten, einmal durchlaufenen Weg C die Windungszahl $n(C, z)$ für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus |C|$ an.





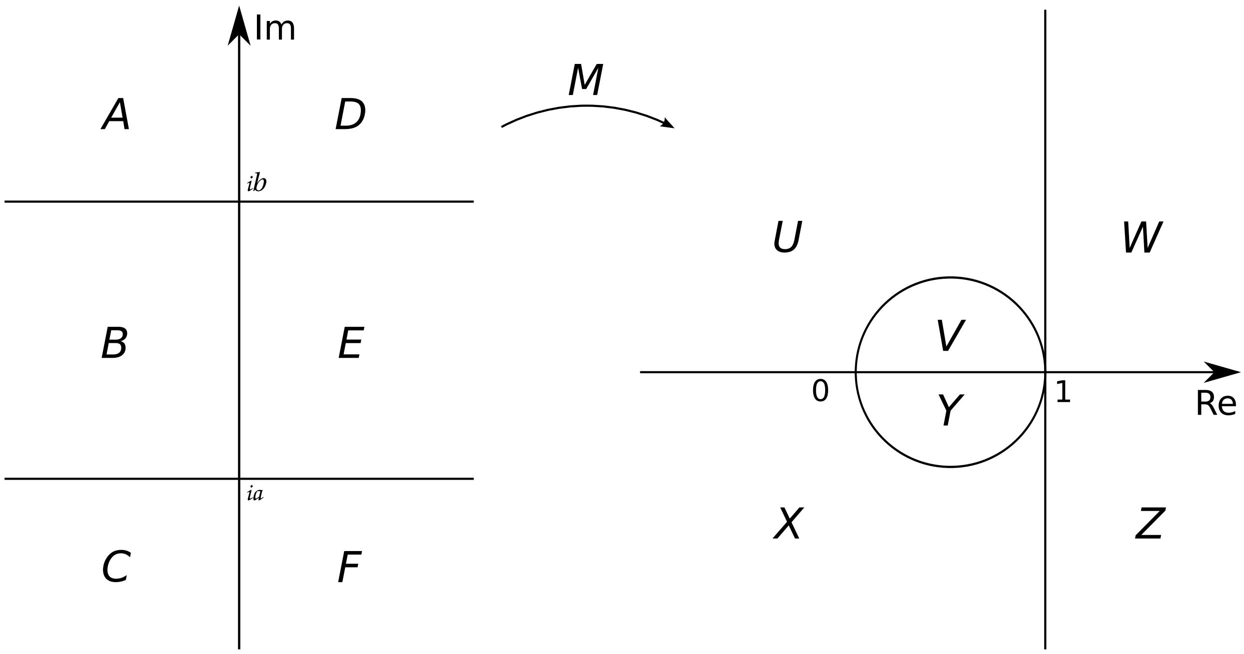
Aufgabe 3 (6 Punkte*)

Name:
Matrikelnummer:

Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $M : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ mit

$$w = Mz = \frac{z - ia}{z - ib}.$$

A, B, C, D, E, F sind Gebiete in der komplexen z-Ebene und U, V, W, X, Y, Z sind Gebiete in der komplexen w-Ebene. Bestimmen Sie (ohne Begründung), welche Gebiete von U, V, W, X, Y, Z die Bildgebiete unter M von A, B, C, D, E, F sind.



* Eine korrekte Zuordnung gibt 1 Punkt.
Eine falsche Zuordnung gibt -1 Punkt.
Keine Zuordnung gibt 0 Punkte.
Die minimale Punktzahl ist 0 Punkte.

Aufgabe 4 (2 + 4 Punkte)

Name:
Matrikelnummer:

(a) Gegeben sind

$$f(z) = \frac{\sin z}{z-1-i} \quad \text{und} \quad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \ \ (n \in \mathbb{N}_0).$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

(b) Es sei G eine offene Menge in $\mathbb{C}$, $z_0 \in G$ und $f \in H(G \setminus \{z_0\})$. Zeigen sie:

$$z_0 \text{ ist Polstelle von } f \iff \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$

Aufgabe 5 (3 + 1 + 2 Punkte)

Name:
Matrikelnummer:

(a) Es sei f holomorph in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und stetig in $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Es gelte $f(z) = 0$ für $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) \geq 0, |z| = 1\}$. Zeigen Sie: $f(z) = 0$ für $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

Hinweis: Betrachten Sie $g(z) = f(z)f(-z)$.

(b) Der Hauptzweig der n-ten Wurzel ($n \in \mathbb{N}$) bildet $\{z \in \mathbb{C} : -\pi < arg(z) < \pi\}$ ab auf den Sektor $\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{n} < arg(z) < \frac{\pi}{n}\}$. Wohin wird dieser Sektor durch den Hauptzweig der n-ten Wurzel abgebildet?

(c) Es sei f eine ganze Funktion. Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$

$$Res\Big(\frac{f(z) + f(\frac{1}{z})}{z^n}; 0\Big).$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Name:
Matrikelnummer:

Gegeben ist

$$f(z) = \frac{5z + i}{z(z + i)}.$$

Berechnen Sie die Laurent Reihe um i, die in $-\frac{i}{2}$ konvergiert. Geben Sie den Konvergenzbereich dieser Reihe an.