Funktionentheorie
Vorlesungszusammenfassung
SS 2012

Andreas Müller-Rettkowski
e-mail: andreas.mueller-rettkowski@kit.edu

Dies ist eine Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze. Der Besuch der Vorlesung ist hierdurch nicht zu ersetzen, denn in der Vorlesung wird erklärt, begründet, veranschaulicht und eingeordnet.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

1.1 Definition von $\mathbb{C}$

Eine *komplexe Zahl* z ist eine geordnetes Paar (x, y) reeller Zahlen. Mit $\mathbb{C}$ wird die Menge der komplexen Zahlen bezeichnet. Es seien $z = (x, y)$ und $w = (u, v)$ aus $\mathbb{C}$.

Definition:

1) $z = w \iff x = u$ und $y = v$,

2) $z + w = (x + u, y + v)$ (Addition in $\mathbb{C}$),

3) $zw = (xu - yv, xv + yu)$ (Multiplikation in $\mathbb{C}$).

Satz 1: Mit diesen Verknüpfungen ist $\mathbb{C}$ ein Körper.

Anmerkungen:
$0 := (0, 0)$ ist das neutrale Element bezüglich der Addition,
$1 := (1, 0)$ ist das neutrale Element bezüglich der Multiplikation,
$-z := (-x, -y)$ ist das inverse Element für die Addition.

Für $z \neq 0$ ist $\frac{1}{z} := \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$ das Element aus $\mathbb{C}$, für das $\frac{1}{z}z = 1$ gilt.

Satz 2: Es seien $x, u \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

$$(x, 0) + (u, 0) = (x + u, 0) \quad \text{und} \quad (x, 0)(u, 0) = (xu, 0).$$

Die komplexe Zahl $(x, 0)$ wird mit $x \in \mathbb{R}$ identifiziert. Somit sind die reellen Zahlen ein Unterkörper von $\mathbb{C}$.
Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lambda(x, y) = (\lambda, 0)(x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Wegen $(0,1)(y,0) = (0,y)$ können wir schreiben

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = x + (0,1)y.$$

Das heißt, dass jede komplexe Zahl z mittels zweier reeller Zahlen x, y und der Zahl $(0,1)$ dargestellt werden kann.

Definition: $i := (0,1)$.

Satz 3: $i^2 = -1$.

Satz 4: $z = (x,y)$ kann in der Form $z = x + iy$ geschrieben werden.

Es gilt $\mathbb{C} = \{z | z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}$.

1.2 Rechnen mit komplexen Zahlen

$\overline{z} = x - iy$ heißt die zu $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ *konjugiert komplexe Zahl.* $Re(z) := x$ heißt Realteil und $Im(z) := y$ heißt Imaginärteil von z.
Für $z, w \in \mathbb{C}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gelten:

$$\begin{aligned} Re(\alpha z + \beta w) &= \alpha Re(z) + \beta Re(w), \\ Im(\alpha z + \beta w) &= \alpha Im(z) + \beta Im(w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Re(z) &= \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \\ Im(z) &= \frac{1}{2i}(z - \overline{z}). \end{aligned}$$

Satz 5: Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

a) $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$,

b) $\overline{\overline{z}} = z$,

c) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ und $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$,

d) $z\overline{z} \in \mathbb{R}$, $z\overline{z} \geq 0$ und $z\overline{z} = 0$ nur falls $z = 0$.

Definition: $|z| := \sqrt{z\overline{z}}$ heißt *Betrag* von $z \in \mathbb{C}$.

$|z|$ gibt den euklidischen Abstand des Punktes z vom Koordinatenanfangspunkt an. $|z - w|$ ist die Länge der Verbindungsstrecke $[z, w]$.

Satz 6: Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

a) $|\overline{z}| = |z|$,

b) $|zw| = |z||w|$,

c) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$,

d) $|Re(z)| \leq |z|$ und $|Im(z)| \leq |z|$,

e) $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2Re(\overline{z}w)$,

f) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

1.3 Konvergenz

$(z_k) \subset \mathbb{C}$ sei eine Folge komplexer Zahlen, $a \in \mathbb{C}$.

Definition: $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = a \Longleftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} |z_k - a| = 0 \Big(\Longleftrightarrow z_k \to a(k \to \infty)\Big)$.

a heißt *Grenzwert der Folge*.

Satz 7: Es gilt:

$$z_k \to a\,(k \to \infty) \Longleftrightarrow Re(z_k) \to Re(a) \quad \text{und} \quad Im(z_k) \to Im(a).$$

Eine Folge $(z_k) \subset \mathbb{C}$ heißt *Cauchy Folge*, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ einen Index N derart gibt, dass für alle $k, l \geq N \quad |z_k - z_l| < \varepsilon$ erfüllt ist.

Bemerkung: Jede konvergente Folge ist eine Cauchy Folge.

Eine Folge $(z_k) \subset \mathbb{C}$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl $R > 0$ gibt, so dass $|z_k| \leq R \quad \forall k$ gilt.

<u>**Satz 8:**</u> **(Bolzano, Weierstrass)**
In $\mathbb{C}$ gelten:

a) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

b) Jede Cauchy Folge ist konvergent.

1.4 Polardarstellung komplexer Zahlen

Jede komplexe Zahl z besitzt eine Darstellung

$$z = re^{i\varphi}\big(:= r(cos\varphi + isin\varphi)\big)$$

mit $\varphi \in \mathbb{R}$ und $r = |z|$.
Für $z \neq 0$ ist φ bis auf Addition ganzzahliger Vielfacher von 2π eindeutig bestimmt.
Wird φ auf ein beliebiges halboffenes Intervall der Länge 2π beschränkt, so ist der Zahl $z \neq 0 \quad \varphi$ mit $z = re^{i\varphi}$ eindeutig zugeordnet.
Wir werden je nach Gegebenheit φ auf $[0, 2\pi)$ oder $(-\pi, +\pi]$ beschränken. Der Winkel, der dann $z = re^{i\varphi}$ liefert, heißt *das Argument* von z, es wird durch $Arg(z)$ bezeichnet. Also:

$$Arg : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to [0, 2\pi) \,\text{oder}\, (-\pi, +\pi].$$

Ein Element der Menge $\{Arg(z)+2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ wird durch $arg(z)$ bezeichnet.

<u>**Satz 9:**</u> Es seien $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi}.$$

Für $z = x + iy$ wird definiert $e^z := e^x e^{iy}$.

<u>**Satz 10:**</u> Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

1.5 Funktionen in $\mathbb{C}$

Es sei $S \subset \mathbb{C}$ und $z \to w := f(z)$ eine Funktion $f : S \to \mathbb{C}$.
$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, $(x,y) \in S$.
$u := Re(f) : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
$v := Im(f) : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Beispiele:

1) $f(z) = z^2 \; : \; u(x,y) = x^2 - y^2$ und $v(x,y) = 2xy$

b) $f(z) = e^z \; : \; u(x,y) = e^x cos(y)$ und $v(x,y) = e^x sin(y)$

1.6 Die Funktion $f(z) = z^n$

Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \overline{D} = \{z/|z| \leq 1\}$

$$f(z) = z^n.$$

Es gilt $f(\overline{D}) = \overline{D}$ und jeder Punkt $w \in \overline{D}$ wird n mal angenommen.

Beispiel:
Gegeben ist die Argumentfunktion mit $Arg : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to [0, 2\pi)$.
Gegeben sei $z = re^{i\theta}$ $(z \neq 0)$, $\theta = Arg(z)$.
Gesucht sind alle $w \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$.
Suche w in der Darstellung $w = te^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Man erhält alle Lösungen der Gleichung $w^n = z$ in der Form:

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i\theta}{n}} e^{\frac{ik2\pi}{n}} \; , \; k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Bemerkung:
Für $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ gilt $(\zeta^k)^n = 1$.
ζ^k , $k = 0, 1, \cdots, n-1$ heißen die *n-ten Einheitswurzeln.*

1.7 Die Gleichung $\varepsilon|z|^2 + \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + \beta = 0$

Für $\varepsilon = 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta < |\alpha|^2$ ist das die Gleichung des Kreises um $-\alpha$ mit Radius $\sqrt{|\alpha|^2 - \beta}$.
Für $\varepsilon = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}$ liegen die $z \in \mathbb{C}$, die dieser Gleichung genügen, auf einer Geraden.

1.8 Die Riemannsche Zahlenkugel und $\widehat{\mathbb{C}}$

$\Sigma := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$.

$\mathbb{C} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{z/z = x + iy\,, x, y \in \mathbb{R}\}$.

$N := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \Sigma$.

Definiere $\Pi : \Sigma \backslash \{N\} \to \mathbb{C}$ durch

$$\Pi(x_1, x_2, x_3) := \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \qquad \text{und} \qquad \infty := \Pi(0, 0, 1)$$

Nennt man $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$, so ist $\Pi : \Sigma \to \widehat{\mathbb{C}}$ bijektiv.
Π heißt *stereographische Projektion.*
Die Umkehrabbildung Π^{-1} werde durch p bezeichnet. Man rechnet nach:

- $p(z) = \dfrac{1}{|z|^2 + 1} \begin{pmatrix} z + \overline{z} \\ -i(z - \overline{z}) \\ |z|^2 - 1 \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{C}$,
- $p(\infty) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Durch $\chi(z, z') := \dfrac{2|z - z'|}{\sqrt{|z|^2 + 1}\sqrt{|z'|^2 + 1}}$, $z, z' \in \widehat{\mathbb{C}}$ wird auf $\widehat{\mathbb{C}}$ eine Metrik definiert.
Man rechnet für $z \in \mathbb{C}$ nach:

$$\chi(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{|z|^2 + 1}} \qquad \text{und} \qquad \chi(\infty, \infty) = 0.$$

Bemerkung: Es gilt

$$\chi(z, z') = ||p(z) - p(z')||$$

wobei

$$\left|\left| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \right|\right| = \left((x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

der euklidische Abstand zwischen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ ist.

Definition: Seien $(a_n) \subset \widehat{\mathbb{C}}$, $a \in \widehat{\mathbb{C}}$.

$$a_n \to a\,(n \to \infty)\,\mathrm{in}\,\widehat{\mathbb{C}} :\Longleftrightarrow \chi(a_n, a) \to 0\,(n \to \infty).$$

Satz 11:

a) Π bildet Kreise in Σ auf Kreise oder Geraden in $\widehat{\mathbb{C}}$ ab.

b) p bildet Kreise oder Geraden in $\widehat{\mathbb{C}}$ auf Kreise in Σ ab.

1.9 $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden

Es gibt kein "$<$". Es gibt lediglich "$=$" oder "$\neq$", denn:
Aus $1 \neq 0$ folgt $0 < 1^2 = 1$.
Aus $i \neq 0$ müsste folgen $0 < i^2 = -1$.
Hieraus würde folgen $0 < 1 + (-1) = 0$!Widerspruch!

Kapitel 2

Offene, abgeschlossene, kompakte Mengen in $\mathbb{C}$ Topologische Grundbegriffe

2.1

1) $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. $D(a,r) := \{z \in \mathbb{C} / |z-a| < r\}$ heißt offene Kreisscheibe um a mit Radius r (r-Umgebung von a).

2) $U \subset \mathbb{C}$ heißt offen $:\Leftrightarrow \forall\, b \in U \quad \exists\, r > 0 \quad D(b,r) \subset U$.

3) $A \subset \mathbb{C}$ heißt abgeschlossen, wenn für jede Folge $(z_n) \subset A$ mit $z_n \to z_o$ $(n \to \infty)$ gilt: $z_o \in A$.

   $M \subset \mathbb{C}: \quad M^c := \mathbb{C} \backslash M$.

4) **Satz 1:**

   a) $M \subset \mathbb{C}$ ist abgeschlossen $\quad\Leftrightarrow\quad M^c$ ist offen.

   b) $M \subset \mathbb{C}$ ist offen $\quad\Leftrightarrow\quad M^c$ ist abgeschlossen.

5) Es sei $M \subset \mathbb{C}$. $z_o \in \mathbb{C}$ heißt:

   a) innerer Punkt von M, falls gilt: $D(z_o, r) \subset M$ für ein $r > 0$.

   b) Randpunkt von M, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gelten: $D(z_o,\varepsilon) \cap M \neq \emptyset$ und $D(z_o,\varepsilon) \cap M^c \neq \emptyset$.

   c) Häufungspunkt (HP) von M, wenn: $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, z \in M \backslash \{z_o\} \quad z \in D(z_o,\varepsilon)$.

   d) isolierter Punkt von M, wenn gelten: $z_o \in M$ und z_o ist kein HP von M.

6) a) $\overset{\circ}{M} := \{z/z \text{ ist innerer Punkt von } M\}$.
   b) $\partial M := \{z/z \text{ ist Randpunkt von } M\}$.
   c) $\overline{M} := M \cup \partial M$ heißt der Abschluss von M.
   d) M heißt beschränkt, falls es ein $R > 0$ mit $M \subset D(0, R)$ gibt.
   e) $diam(M) := sup\{|z - w|/z, w \in M\}$ heißt der Durchmesser der beschränkten nichtleeren Menge M.
   f) $\mathbb{H}(M) = \{z/z \text{ ist HP von } M\}$

7) **Satz 2:** Es sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Menge. Es gelten:

   1) M ist offen $\Leftrightarrow M = \overset{\circ}{M} \Leftrightarrow M \cap \partial M = \emptyset$.
   2) $\partial M = \partial(M^c)$.
   3) M ist abgeschlossen $\Leftrightarrow \partial M \subset M \Leftrightarrow M = \overline{M}$.
   4) $\partial M = \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}$.
   5) $z_o \in \mathbb{H}(M) \Leftrightarrow$ es gibt eine Folge $(z_n) \subset M \setminus \{z_o\}$ mit $z_n \to z_o$ $(n \to \infty)$.
   6) $M \cup \mathbb{H}(M) = \overline{M}$.
   7) M ist abgeschlossen $\Leftrightarrow \mathbb{H}(M) \subset M$.

2.2

Es sei $M \neq \emptyset$, $M \subset \mathbb{C}$. $f : M \to \mathbb{C}$ sei eine Funktion.

1) $z_o \in \mathbb{H}(M)$.
   $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = a :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in (M \cap D(z_o, \delta)) \setminus \{z_o\}$
   $|f(z) - a| < \varepsilon$.

2) $z_o \in M$.
   f heißt stetig in z_o $:\Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_o} f(z) = f(z_o)$.

3) f heißt gleichmäßig stetig auf M, falls:
   $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z, z' \in M \quad (|z - z'| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z')| < \varepsilon)$.

2.3 Kompakte Mengen in $\mathbb{C}$

Die Menge $K \subset \mathbb{C}$ heißt kompakt, falls aus jeder Folge $(z_n) \subset K$ eine Teilfolge ausgewählt werden kann, die gegen ein Element aus K konvergiert.

Satz 3: $K \subset \mathbb{C}$ ist kompakt $\Leftrightarrow$ K ist beschränkt und abgeschlossen.

Satz 4: $K \subset \mathbb{C}$ sei kompakt und K_j $(j \in \mathbb{N})$ seien abgeschlossene Mengen, für die $K_{j+1} \subset K_j$ $(j \in \mathbb{N})$ erfüllt ist. Dann gilt $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}} K_j \neq \emptyset$.

Satz 5: $K \subset \mathbb{C}$ sei kompakt und $f : K \to \mathbb{C}$ sei stetig. Dann ist $f(K)$ kompakt.

Satz 6: $K \subset \mathbb{C}$ sei kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann gibt es $v, w \in K$ mit $f(w) \leq f(z) \leq f(v)$ für alle $z \in K$.

Satz 7: $K \subset \mathbb{C}$ sei kompakt und $f : K \to \mathbb{C}$ sei stetig. Dann ist f auf K gleichmäßig stetig.

Definition: (Abstand zweier Mengen)
$A, B \subset \mathbb{C}: \quad dist(A,B) := inf\{|z-w| \,/\, z \in A, w \in B\}$

Satz 8: Es seien $A \subset \mathbb{C}$ eine abgeschlossene Menge und $v \in \mathbb{C}$. Dann gibt es ein $w \in A$ mit $\quad dist(A, \{v\}) = |w - v|$.

Satz 9: Es seien $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $A \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen. Dann existieren $z_o \in K$ und $w_o \in A$ mit $\quad dist(K, A) = |z_o - w_o|$.

Satz 10: Gegeben ist eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{C}$ und $r > 0$. Dann gibt es endlich viele Punkte $z_1, z_2, ..., z_N$ so dass $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} D(z_j, r)$ gilt.

2.4 Zusammenhängende Mengen

Ein metrischer Raum (X, d) heißt zusammenhängend (zshgd),

- wenn es keine Zerlegung $X = U \cup V$ gibt mit: $U \cap V = \emptyset$; U, V offen (in X); $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$.
- wenn aus $(X = U \cup V;\ U \cap V = \emptyset;\ U, V$ offen$)$ folgt: $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$.

Satz 11: $X \subset \mathbb{R}$ enthalte mindestens zwei Elemente. Dann ist X zshgd genau dann, wenn X ein Intervall ist.

Satz 12: Das Bild $f(X)$ eines zshgd Raumes X unter einer stetigen Funktion $f : X \to Y$ ist zshgd.

Der metrische Raum X heißt wegzshgd, wenn es zu je zwei Punkten $a, b \in X$ eine (stetige) Kurve (5.Kapitel) $\gamma : [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ gibt.

Beispiel: Jede konvexe Menge X in einem normierten Vektorraum ist wegzshgd.

Satz 13: Jeder wegzshgd Raum ist zshgd.
Beweis: Indirekt und mit Satz 11 und Satz 12.

Satz 14: Jede zshgd offene Menge X in $\mathbb{C}$ ist wegzshgd. Es gilt sogar: Je zwei Punkte $a, b \in X$ können durch einen Streckenzug in X verbunden werden.
Beweis: Es sei $a \in X$. Definiere
$U = \{x \in X/$ es gibt in X einen Streckenzug, der a mit x verbindet$\}$
Zeige: $U \neq \emptyset$, U offen und $V = X \backslash U$ offen. Folgere mit der Voraussetzung "X zshgd", dass $V = \emptyset$, also $X = U$ gilt.

Definition: Eine nichtleere offene zshgd Menge in $\mathbb{C}$ heißt Gebiet.

Kapitel 3

Differentiation in Komplexen

3.1

Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $z_o \in \Omega$ und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Existiert $\lim\limits_{z \to z_o} \dfrac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}$, so heißt f in z_o differenzierbar (diff'bar). Der Grenzwert wird dann durch $f'(z_o)$ bezeichnet und heißt die erste Ableitung von f in z_o.
f heißt holomorph in $z_o \in \Omega$, falls es eine Umgebung $D(z_o, \delta) \subset \Omega$ von z_o gibt derart, dass f in jedem $z \in D(z_o, \delta)$ diff'bar ist.
f heißt holomorph in Ω, falls f in jedem Punkt $z \in \Omega$ holomorph ist. Mit $H(\Omega)$ wird die Menge der auf Ω holomorphen Funktionen bezeichnet.

3.2

Es sei $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $w = f(z)$ gegeben.
$u := Re(f) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v := Im(f) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Satz 1:
Es ist f genau dann in $z_o = x_o + iy_o \in \Omega$ diff'bar, wenn u, v in (x_o, y_o) diff'bar sind und in (x_o, y_o) die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen (CR-DGLn)

$$D_1 u = D_2 v \quad \text{und} \quad D_2 u = -D_1 v$$

erfüllt sind.
(f ist in Ω holomorph $\Leftrightarrow$ u, v sind in Ω diff'bar und es sind in Ω

$$D_1 u = D_2 v \quad \text{und} \quad D_2 u = -D_1 v$$

erfüllt.)

3.3 Bemerkungen. Ergänzungen.

1) Sind u, v in Ω stetig partiell diff'bar und sind in Ω die CR-DGLn erfüllt, so ist $f = u + iv$ in Ω holomorph.

2) Ist $f = u + iv$ in $z = x + iy \in \Omega$ diff'bar, so hat man

$$\begin{aligned} f'(x+iy) &= D_1u(x,y) + iD_1v(x,y) &&= D_2v(x,y) - iD_2u(x,y) \\ &= D_2v(x,y) + iD_1v(x,y) &&= D_1u(x,y) - iD_2u(x,y). \end{aligned}$$

3) Mit $\vec{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$, folgt mit 2)
$det\vec{f}\,'(x,y) = |f'(x+iy)|^2$.

4) Wir ordnen $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, die Funktion $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $F(x,y) := u(x,y) + iv(x,y)$ zu. Hiermit können die CR-DGLn für f in der einen Gleichung $\underline{D_2F(x,y) = iD_1F(x,y)}$ zusammengefasst werden.

5) Es seien f und F wie unter 4). Definiere $G(z, \overline{z}) := F\left(\frac{1}{2}(z+\overline{z}), \frac{1}{2i}(z-\overline{z})\right)$ und behandle die Variablen $z, \overline{z}$ als voneinander unabhängige Variable. Es gilt ($\partial_{\overline{z}}$ partielle Ableitung nach $\overline{z}$)

$$\partial_{\overline{z}} G(z, \overline{z}) = \frac{i}{2}(D_2F - iD_1F),$$

so dass man die Holomorphie von f auch durch

$$(\partial_{\overline{z}} f)(z) = 0, z \in \Omega,$$

charakterisieren kann. (Wirtinger Kalkül. Siehe dazu Remmert).

6) Ist f in Ω holomorph, $u = Re(f)$, $v = Im(f)$, so gilt $\nabla u(x,y) \cdot \nabla v(x,y) = 0$, d.h. die Kurvenscharen $u(x,y) = konst$ und $v(x,y) = konst$ sind orthogonal zueinander.

7) Wir nehmen das Ergebnis: $f \in H(\Omega) \Rightarrow f' \in H(\Omega)$ vorweg. Es folgt dann: $f \in H(\Omega), u = Re(f), v = Im(f) \Rightarrow u, v \in C^\infty(\Omega)$.

<u>Satz 2:</u> Es sei $f \in H(\Omega)$. Dann sind u und v in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ harmonisch: es gilt für $(x,y) \in \Omega \quad \Delta u(x,y) = \Delta v(x,y) = 0$ ($\Delta u = D_1^2 u + D_2^2 u$).

<u>Satz 3:</u> Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zshgd Gebiet und ist u in Ω harmonisch, so gibt es harmonische Funktionen v derart, dass $f := u + iv$ in $\Omega \subset \mathbb{C}$ holomorph ist.

8) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zshgd Gebiet und $\vec{v} : \Omega \to \mathbb{R}^2$,
$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} p(x,y) \\ q(x,y) \end{pmatrix}$ das Geschwindigkeitsfeld einer stationären, ebenen, inkompressiblen, wirbelfreien Flüssigkeitsströmung. Es gelten somit (p, q sollen genügend oft stetig diff'bar sein)

$$D_1 p + D_2 q = 0 \text{ und } D_2 p - D_1 q = 0$$

in Ω. Mit 7) erhält man Funktionen $\varphi, \psi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla\varphi = \vec{v}$ und $\nabla\psi = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$ in Ω.
Damit ist $f := \varphi + i\psi$ in Ω holomrph. f heißt $\underline{\text{komplexes Potential für } \vec{v}}$.
Es gilt $\overline{f'} = p + iq \, (= \vec{v})$.
Die Kurven $\varphi(x,y) = konst$ heißen $\underline{\text{Potentiallinien}}$, die Kurven $\psi(x,y) = konst$ heißen $\underline{\text{Stromlinien}}$ der durch $\vec{v} = \overline{f'}$ beschriebenen Strömung. ψ heißt auch Stromfunktion von $\vec{v}$.

Beispiele:

1) $f(z) = z^2 = \varphi + i\psi \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$, $\varphi(x,y) = x^2 - y^2$, $\psi(x,y) = 2xy$.
(Skizze der Strömung!).

2) $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$, $(0,0) \notin \Omega$.

Man erhält

$$\varphi(x,y) = ln(\sqrt{x^2+y^2}), \psi(x,y) = arctan\frac{y}{x}, f(z) = ln|z| + i\, arg(z).$$

Die Stromlinien sind vom Ursprung ausgehende Halbgeraden.

Kapitel 4

Potenzreihen

4.1 Erinnerungen

1) (a_k), (b_k) seien komplexe Zahlenfolgen.

   1. $(\sum a_k$ konvergent $) \Rightarrow (a_k \to 0\,,\ k \to \infty)$.
   2. (Majorantenkriterium)
      $(\ |a_k| \leq |b_k|, \forall k, \sum b_k$ konvergent $) \Rightarrow (\sum a_k$ ist absolut konvergent).

2) $U \subset \mathbb{C}$ sei eine offene Menge, (f_k) eine Folge von Funktionen $f_k : U \to \mathbb{C}$.
   $f_k \to f\ (k \to \infty)$ <u>punktweise auf U</u> bedeutet:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, z \in U \quad \exists\, k_o \in \mathbb{N} \quad \forall\, k \geq k_o \quad |f_k(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

   Für $g : U \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir durch $||g||_U$ die Supremumsnorm:

$$||g||_U = \sup \{|g(z)|\,/z \in U\}.$$

   $f_k \to f\ (k \to \infty)$ <u>gleichmäßig auf U</u>, falls gilt:

$$\lim_{k \to \infty} ||f_k - f||_U = 0.$$

   $f_k \to f\ (k \to \infty)$ <u>lokalgleichmäßig auf U</u>, falls gilt:

$$\forall\, z \in U \quad \exists\, D(z, \lambda) \subset U \quad ||f_k - f||_{D(z,\lambda)} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

   Es gelten:

   3. Die Folge (f_k) konvergiert auf U lokalgleichmäßig genau dann, wenn (f_k) auf jeder kompakten Teilmenge von U gleichmäßig konvergiert.

4. Die Grenzfunktion einer auf U lokalgleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist auf U stetig.
5. $(f_k), f_k : U \to \mathbb{C}$. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent und gilt

$$|f_k(z)| \leq a_k \quad \forall z \in U, \forall k \in \mathbb{N},$$

so ist $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ auf U gleichmäßig und absolut konvergent.

4.2

(a_k) sei eine komplexe Zahlenfolge. $z_o \in \mathbb{C}$. Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_o)^k$$

konvergent? Für diese z wird durch (1) eine Funktion p definiert. Welche Eigenschaften hat p?

1) **Satz 1:** Es sei $z_1 \neq z_o$ und die Folge $\left(a_n(z_1 - z_o)^n\right)_n$ sei beschränkt. Dann konvergiert die Potenzreihe (1) absolut und lokalgleichmäßig in $D(z_o, r_1)$, wobei $r_1 = |z_1 - z_o|$ gesetzt ist.

   Satz 2: Eine Potenzreihe (1) konvergiert entweder absolut und lokalgleichmäßig auf $\mathbb{C}$ oder es gibt eine Zahl R, $0 \leq R < +\infty$, mit der Eigenschaft: (1) konvergiert absolut und lokalgleichmäßig auf $D(z_o, R)$ und ist für alle z mit $|z - z_o| > R$ divergent. Es gilt:

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[k]{|a_k|}\,.$$

   Hierbei sind $R = 0$, falls $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = +\infty$, und $R = +\infty$ im Fall $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = 0$ gemeint.

2) Bemerkungen:
   a) R heißt Konvergenzradius der Reihe (1). R ist der Radius des größten Kreises um z_o, in dem (1) konvergiert.
   b) Es gilt $\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}|$, falls dieser Grenzwert existiert.

3) <u>Beispiele:</u>

$$e^z \,(= \exp(z)) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad , z \in \mathbb{C}\,,$$

$$\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad , z \in \mathbb{C}\,,$$

$$\cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad , z \in \mathbb{C}\,.$$

Für jede dieser Reihen gilt $R = \infty$. exp, sin, cos sind also für alle $z \in \mathbb{C}$ durch obige Reihen definiert.
Es gilt: $e^{iz} = \cos(z) + i\,\sin(z)\,,\; z \in \mathbb{C}$.

Es folgt: $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.

Speziell für $z = x \in \mathbb{R}$ hat man $Re(e^{ix}) = \cos(x)$, $Im(e^{ix}) = \sin(x)$, $|e^{ix} = 1|$.
Es gilt (Ausmultiplizieren mittels Cauchy-Produkt, Binomischer Satz):
$\exp(z)\exp(w) = \exp(z+w)\,, z, w \in \mathbb{C}$.

4.3

1) **<u>Satz 3:</u>** Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ (o.B.d.A. $z_o = 0$) mit $a_k \in \mathbb{C}$ sei in
$G = \{z/\,|z| < R\}$ konvergent.
Dann ist die Funktion $f : G \to \mathbb{C}$, $z \to \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ holomorph.
Es gilt $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$, $z \in G$.

<u>zum Beweis:</u>

1. Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ ist ebenfalls R.
2. Für ξ, $|\xi| < R$, ist zu zeigen, dass für $|z| \le \varrho$:

$$q(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi} & , \quad z \neq \xi \\[2ex] \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k a_k \xi^{k-1} & , \quad z = \xi \end{cases}$$

in ξ stetig ist. Hier ist ϱ beliebig mit $|\xi| < \varrho < R$.

Mit $g_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k-1}\, \xi^k \,, z \in \mathbb{C} \,, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, g_n(z), \; |z| \leq \varrho.$

3. Mit dem Majorantenkriterium (4.1, 5.) zeigt man die gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe. Da die g_n stetig sind, ist q in $\{z/|z| \leq \varrho\}$ also in ξ stetig.

2) <u>Folgerungen:</u>

1. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_o)^k$ habe den Konvergenzradius R. Dann ist $f^{(j)}$ für $|z - z_o| < R$ holomorph $(j = 0, 1, 2, \cdots)$. Es gelten:
   $f^{(j)}(z) = \sum_{k=j}^{\infty} k\,(k-1) \,\cdots\, (k-j+1)\, a_k\, (z - z_o)^{k-j}, \; |z| < R,$
   $a_j = \frac{1}{j!} f^{(j)}(z_o) \quad , j = 0, 1, 2, \cdots .$
2. **<u>Satz 4:</u>** (Identitätssatz für Potenzreihen)
   Es seien $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z - z_o)^k$ und $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\,(z - z_o)^k$ konvergent für $|z - z_o| < R$. Dann gilt:
   $f(z) = g(z)$ für $|z - z_o| < R \Leftrightarrow a_k = b_k \,,\; k = 0, 1, 2, \cdots .$

4.4

<u>Satz 5:</u>
$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k$ mit $a_k \in \mathbb{R}, a_{k+1} \leq a_k, a_k \to 0\,(k \to \infty)$ sei gegeben. Dann konvergiert die Reihe für $|z| \leq 1$ mit eventueller Ausnahme von $z = 1$.

<u>Satz 6:</u> (Der Abelsche Grenzwertsatz)
Es sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit Konvergenzradius $R > 0$ gegeben. Es sei ξ, $|\xi| = R$, mit: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \xi^k$ ist konvergent. Dann gilt $\lim_{\varrho \to 1-0} f(\varrho\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \xi^k$.
(Stetigkeit von f in ξ bei radialer Annäherung).
(für eine Verallgemeinerung siehe Storch/Wiebe Lehrbuch der Mathematik Band 1, Abschnitt 12.B.7).

Beispiele:

1) $\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \lim_{x \to 1-0} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \left(\lim_{x \to 1} ln(1+x) \right).$

2) Aus der Konvergenz der Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \ \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j \right)$$

folgt

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j \right)}_{\text{Das Cauchy Produkt der beiden Reihen rechts}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

Kapitel 5

Konforme Abbildung

5.1

1) Eine Kurve C ist gegeben durch eine stetige Funktion $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$; $z = \varphi(t)$ heißt Parameterdarstellung von C. $|C|$ heißt Träger der Kurve. $|C|$ ist eine kompakte Menge als stetiges Bild der kompakten Menge $[\alpha, \beta]$.

2) Die Kurve C, φ heißt geschlossen, falls $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ gilt. φ heißt Jordankurve, falls: $\alpha \leq t < t' < \beta \Rightarrow \varphi(t) \neq \varphi(t')$.

3) Sind zwei Kurven C_j, $\varphi_j : [\alpha_j, \beta_j] \to \mathbb{C}\,(j = 1, 2)$ mit $\varphi_1(\beta_2) = \varphi_2(\alpha_2)$ gegeben, so definieren wir die Summenkurve $C_1 + C_2$ durch:

$$\varphi(t) := \begin{cases} \varphi_1(t) & , \quad \alpha_1 \leq t \leq \beta_1 \\ \varphi_2(t + \alpha_2 - \beta_1) & , \quad \beta_1 \leq t \leq \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2 \end{cases}$$

   Mit $[a, b]$ wird die Verbindungsstrecke von $a \in \mathbb{C}$ nach $b \in \mathbb{C}$ bezeichnet. Sind $z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$, so bezeichnet $[z_1, z_2] + [z_2, z_3] + \cdots + [z_{n-1}, z_n]$ den Polygonzug von z_1 über $z_2, \cdots, z_{n-1}$ bis z_n.

4) C sei durch $z = \varphi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ gegeben. $-C$, die zu C entgegengesetzte Kurve, ist dann etwa durch:

$$z = \psi(t) := \varphi(\alpha + \beta - t)\,,\ \alpha \leq t \leq \beta\,,$$

   gegeben.

5) Die Kurve C: $z = \varphi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, heißt glatt, wenn $\varphi \in C^1[\alpha, \beta]$ und $\dot{\varphi}(t) \neq 0$, $\alpha \leq t \leq \beta$, erfüllt sind.
   Die Kurve C heißt ein Weg (oder stückweise glatt), falls es glatte Kurven C_1, C_2, $\cdots$, C_n mit $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ gibt.

5.2

Es seien $G \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $C : z = \varphi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, eine Kurve in G, d.h. $\varphi : [\alpha, \beta] \to G$ oder auch $|C| \subset G$.
$f(C)$, $w : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, $w = f \circ \varphi$, ist stetig, also eine Kurve: die Bildkurve.
Es sei jetzt C glatt: $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ und $f'(z) \neq 0$, $z \in G$.
Dann ist $f(C)$ wieder glatt:

$$\dot{w}(t) = f'(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) \neq 0\,,\ \alpha \leq t \leq \beta$$

$\arg(\dot{z}(t_o))$ ist der Winkel zwischen der Tangente an C in $z_o = z(t_o)$ und der positiven reellen Achse.

Satz:
Es sei f in G holomorph und $f'(z) \neq 0$ für $z \in G$. Dann ist das Bild $f(C)$ der glatten Kurve C eine glatte Kurve, und der Winkel zwischen zwei glatten Kurven bleibt unter f (hinsichtlich Größe und Drehsinn) erhalten.

Bemerkungen:

1) Ist in $z_o \in G \quad f'(z_o) = 0$, so kann sich der Winkel in z_o ändern: $f(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $z_o = 0$. Der Winkel zwischen Kurven, die sich in 0 schneiden ver-n-facht sich.

2) Ist $f'(z_o) \neq 0$, $\dot{\varphi}(t_o) \neq 0 \quad (z_o = \varphi(t_o))$, so gilt für die Längen der Kurven C und $f(C)$ bei z_o näherungsweise $l(f(C)) = l(C)|f'(z_o)|$.

3) Eine Abbildung f heißt konform, wenn Schnittwinkel erhalten bleiben.
Der Satz besagt somit:
Holomorphe Funktionen f mit $f'(z) \neq 0$ sind konforme Abbildungen.

Kapitel 6

Möbiustransformationen

6.1

$T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ heißt Möbiustransformation $\Leftrightarrow$ es gibt Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$ und

$$T(z) := \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & , \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{-\dfrac{d}{c}\} \\ \dfrac{a}{c} & , \quad z = \infty \\ \infty & , \quad z = -\dfrac{d}{c} \end{cases}$$

$c = 0$ ist der Trivialfall: T ist eine Drehstreckung verknüpft mit einer Translation.

$c \neq 0$: $\quad T(z) = \dfrac{a}{c} - \dfrac{ad-bc}{c(cz+d)}$, $T'(z) = \dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$, $z \in \widehat{\mathbb{C}}$.

Wir bezeichnen durch $\mathbb{M}$ die Menge aller Möbiustransformationen. $T \in \mathbb{M}$ ist
bijektiv und holomorph.

<u>**Satz 1:**</u> $(\mathbb{M}, \circ)$ ist eine Gruppe.
<u>zum Beweis:</u>
$id \in \mathbb{M}$.

$T = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $T \in \mathbb{M} \Rightarrow T^{-1}(z) = \dfrac{-dz+b}{cz-a}$, $T^{-1} \in \mathbb{M}$.

$S, T \in \mathbb{M} \Rightarrow S \circ T \in \mathbb{M}$.

6.2 Bemerkung

Spezielle Möbiustransformationen sind:

$$\begin{aligned} &z \to az\,(a \neq 0) && \text{Drehstreckung,}\\ &z \to a + z && \text{Translation,}\\ &z \to \frac{1}{z} && \text{Inversion.} \end{aligned}$$

<u>**Satz 2:**</u> Die Gruppe $(\mathbb{M}, \circ)$ wird durch Drehstreckungen, Inversion und Translationen erzeugt.

<u>**Bemerkungen:**</u>

1) Ein <u>verallgemeinerter Kreis</u> ist ein Kreis oder eine Gerade.

2) Eine Abbildung $\widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ heißt <u>kreistreu</u>, wenn sie verallgemeinerte Kreise in verallgemeinerte Kreise abbildet.

<u>**Satz 3:**</u> Die Inversion ist kreistreu.

<u>**Satz 4:**</u> Jede Abbildung $T \in \mathbb{M}$ ist kreistreu.

6.3

<u>**Satz 5:**</u> Eine Möbiustransformation mit mehr als zwei Fixpunkten ist die Identität.

(DV) Es seien z_1, z_2, z_3 paarweise verschiedene Punkte aus $\widehat{\mathbb{C}}$. Durch:

$$T(z) := \begin{cases} \dfrac{z - z_1}{z - z_3} \dfrac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} & , \quad (z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}) \\[2ex] \dfrac{z_2 - z_3}{z - z_3} & , \quad (z_1 = \infty) \\[2ex] \dfrac{z - z_1}{z - z_3} & , \quad (z_2 = \infty) \\[2ex] \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} & , \quad (z_3 = \infty) \end{cases}$$

wird die Möbiustransformation definiert, die $z_1 \to 0$, $z_2 \to 1$, $z_3 \to \infty$ abbildet.

<u>**Satz 6:**</u>
z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 seien Tripel paarweise verschiedener Zahlen aus $\widehat{\mathbb{C}}$.

Es gibt genau ein $T \in \mathbb{M}$ mit $T(z_j) = w$; $(j = 1, 2, 3)$.
<u>zum Beweis:</u>
Existenz mit (DV). Eindeutigkeit mit Satz 5.
Ist T_1 die Abbildung, die $w_1 \to 0$, $w_2 \to 1$, $w_3 \to \infty$ und T_2 die Abbildung, die $z_1 \to 0$, $z_2 \to 1$, $z_3 \to \infty$ bewirkt, so ist $T = T_1^{-1} \circ T_2$ die geforderte Möbiustransformation.

Die in Satz 6 bestimmte Abbildung T wird implizit durch $T_1(T(z)) = T_2(z)$ gegeben. Ausgeschrieben bedeutet das:

$$(*) \quad \frac{T(z) - T(z_1)}{T(z) - T(z_3)} \frac{T(z_2) - T(z_3)}{T(z_2) - T(z_1)} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

6.4 Winkeltreue. Orientierungstreue. Gebietstreue.

1. Zwei verallgemeinerte Kreise K_1, K_2 mögen sich in b schneiden. Gilt $a \in K_1$, $c \in K_2$, so bezeichnen wir den (orientierten) Schnittwinkel zwischen K_1, K_2 in b durch $\measuredangle(a, b, c)$.
   Da für $T \in \mathbb{M}$ für alle $z \quad T'(z) \neq 0$ gilt, hat man nach Kapitel 5:

   <u>Satz 7:</u> (Winkeltreue)
   Für $T \in \mathbb{M}$ gilt: $\measuredangle(a, b, c) = \measuredangle(T(a), T(b), T(c))$.

2. Drei verschiedene Punkte a, b, c eines verallgemeinerten Kreises K legen wie folgt eine Orientierung (a, b, c) fest: c liegt nicht auf dem Bogen (a, b) von a nach b.
   $\widehat{\mathbb{C}}$ wird unterteilt in K und zwei Gebiete. Das zur Linken von K liegende Gebiet ist dasjenige, in das der Normalenvektor it (t Tangente) weist.

   <u>Satz 8:</u> (Orientierungstreue, Gebietstreue)
   Es sei $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ das Gebiet zur Linken bezüglich der Orientierung (a, b, c) des verallgemeinerten Kreises K. Dann liegt für jedes $T \in \mathbb{M}$ das Bild $T(G)$ zur Linken bezüglich der Orientierung $(T(a), T(b), T(c))$ des verallgemeinerten Bildkreises $T(K)$. $T(G)$ ist ein Gebiet.
   <u>zum Beweis:</u> $T(G)$ ist offen, da T^{-1} in $\widehat{\mathbb{C}}$ stetig und G offen ist. Da T stetig ist, ist $T(G)$ zshgd: $T(G)$ ist ein Gebiet. Es liegt links oder rechts von $T(K)$. Die Tangentenrichtung im Bild ergibt sich aus der Abfolge der Bögen $T(\widehat{ab})$, $T(\widehat{bc})$, $T(\widehat{ca})$.

6.5 Das Doppelverhältnis

Das Doppelverhältnis der Zahlen z, z_1, z_2, z_3: $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ und z_1, z_2, $z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ und $z_1 \neq z_2 \neq z_3$ ist die unter 6.3 (DV) definierte Möbiustransformation T, die wir jetzt durch (z, z_1, z_2, z_3) bezeichnen. Es gelten also:
$(z_1, z_1, z_2, z_3) = 0$, $(z_2, z_1, z_2, z_3) = 1$, $(z_3, z_1, z_2, z_3) = \infty$.

<u>**Satz 9:**</u> Es seien z, z_1, z_2, $z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ und z_1, z_2, z_3 paarweise verschiedene und $S \in \mathbb{M}$. Es gilt:

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (S(z), S(z_1), S(z_2), S(z_3)).$$

<u>**Lemma:**</u>
z_1, z_2, z_3, z_4 liegen auf einem verallgemeinerten Kreis genau dann, wenn $(z_4, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}$ gilt.

6.6 Spiegeln an verallgemeinerten Kreisen.

<u>**Definition:**</u> z_1, z_2, z_3 mögen auf einem verallgemeinerten Kreis K liegen. $\varrho_K(z)$ heißt <u>Spiegelpunkt von z an K</u>, falls:

$$(\varrho_K(z), z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}$$

erfüllt ist.

<u>**Bemerkung:**</u> Ist $K = \widehat{\mathbb{R}}$ $(= \mathbb{R} \cup \{\infty\})$, so liest man ab:

$$\varrho_{\widehat{\mathbb{R}}}(z) = \overline{z}.$$

<u>**Satz 10:**</u> (Symmetrie-Prinzip) Es seien $T \in \mathbb{M}$, K ein verallgemeinerter Kreis und z_1, z_2, $z_3 \in K$. Es gilt:

$$T(\varrho_K(z)) = \varrho_{T(K)}(T(z))\,,\; z \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

Im Fall $K = \widehat{\mathbb{R}}$ und $T(K) = \widehat{\mathbb{R}}$, besagt das: $T(\overline{z}) = \overline{T(z)}$.
(Das kann man auch aus $(*)$, 6.3 ablesen).

<u>**Satz 11:**</u> L sei die Gerade $z(t) = a + t\,e^{i\varphi}$, $t \in \mathbb{R}$, $(a \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ fest). Es gilt:

$$\varrho_L(z) = e^{2i\varphi}(\overline{z} - \overline{a}) + a.$$

L ist die Mittelsenkrechte der Strecke $[z, \varrho_L(z)]$.

<u>**Satz 12:**</u> Es sei K der Kreis um a mit Radius R. Es gilt:

$$\varrho_K(z) = a + \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{a}}.$$

<u>Übung:</u> Deute $\varrho_K(z)$ geometrisch. Verwende dies zu einer Konstruktion von $\varrho_K(z)$ aus z.

Kapitel 7

Der Logarithmus

7.1

7.2

Satz 1: Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Jeder Streifen $S_\alpha := \{z/\, \alpha < Im(z) < \alpha + 2\pi\}$ wird durch $f(z) = \exp(z)$ schlicht (d.h. holomorph und injektiv) auf die geschlitzte Ebene $E_\alpha = \mathbb{C}\backslash\{w/\, w = re^{i\alpha},\, r \geq 0\}$ abgebildet.

7.3

Satz 2: $E_{-\pi} = \{z/\, z \neq 0,\, -\pi < \arg(z) < \pi\}$ $(=\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0])$ wird durch $\log(z) := \ln|z| + i\arg(z)$ schlicht auf $S_{-\pi} := \{w/\, -\pi < Im(w) < \pi\}$ abgebildet.
Es gelten $\exp(\log(z)) = z$, $z \in E_{-\pi}$, und $\log'(z) = \dfrac{1}{z}$, $z \in E_{-\pi}$.

7.4

Es seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die $\exp(f(z)) = z$, $z \in G$, erfüllt.
f heißt dann ein Zweig des Logarithmus auf G.
Mit $G = E_{-\pi}$ ist log aus Satz 2 ein Zweig des Logarithmus: der sogenannte Hauptzweig.

Satz 3: Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f auf G ein Zweig des Logarithmus, so sind alle Zweige des Logarithmus auf G durch $f(z)+2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, gegeben.

Bemerkung:
In A3, 5. Übung, wird gezeigt, dass auf $\{z/\,|z-1|<1\}$ der Hauptzweig des Logarithmus die Darstellung

$$\log(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^n}{n}$$

besitzt.

7.5

Ist $\log(z)$ ein Zweig des Logarithmus auf G, so wird für $b \in \mathbb{C}$ $\quad f(z) = z^b$ durch

$$z^b = \exp(b\log(z)),\ z \in G,$$

definiert.

Satz 4: Ist log der Hauptzweig des Logarithmus, so ist $f(z) = z^b$, $z \in E_{-\pi}$ holomorph. Es gilt $f'(z) = bz^{b-1}$.

Kapitel 8

Kurvenintegrale Stammfunktionen

8.1

$-\infty < \alpha < \beta < \infty$, $w : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ sei stückweise stetig:

$$w(t) = u(t) + i\,v(t),\ u(t) = Re w(t),\ v(t) = Im w(t).$$

<u>**Satz 1:**</u> $\displaystyle \Big|\int_\alpha^\beta w(t)dt\Big| \leq \int_\alpha^\beta |w(t)|dt.$

<u>zum Beweis:</u>

Ist $\displaystyle\int_\alpha^\beta w(t)dt \neq 0$, so sei $\displaystyle\vartheta = \arg(\int_\alpha^\beta w(t)dt)$.

Es gilt: $\displaystyle \Big|\int_\alpha^\beta w(t)dt\Big| = \int_\alpha^\beta Re(e^{-i\vartheta}w(t))dt \leq \int_\alpha^\beta |w(t)|dt.$

8.2

1) Ist $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ eine glatte Kurve C und $f : |C| \to \mathbb{C}$ stetig, so wird definiert:

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)dt.$$

<u>Bemerkung:</u> Ist $h : [\alpha^*, \beta^*] \to [\alpha, \beta]$ aus C^1 und streng wachsend, so ist $z = \psi(\tau) := \varphi(h(\tau))$, $\alpha^* \leq \tau \leq \beta^*$, eine Kurve C^* mit $|C| = |C^*|$. Es gilt:

$$(*) \quad \int_C f(z)dz = \int_{C^*} f(z)dz.$$

Also: Geht C aus C^* durch Parametertransformation hervor, so gilt $(*)$.

2) Ist C ein Weg: $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$, so gilt

$$\int_C f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} f(z)dz.$$

3) Ist $-C$ die zu C entgegengesetzte glatte Kurve, so gilt

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz,$$

und also

$$\int_{C+(-C)} f(z)dz = 0\,.$$

4) $\displaystyle\int_C f(z)|dz| := \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\dot\varphi(t)|dt.$

<u>**Satz 2:**</u> $\displaystyle\Big|\int_C f(z)dz\Big| \leq \int_C |f(z)||dz| \leq Ml(C),$

wobei $M = \max\{|f(z)|,\ z \in |C|\}$ und $l(C) = \displaystyle\int_C |dz|$ die Länge von $|C|$ sind.

Ist C ein geschlossener Weg, so schreiben wir auch:

$$\int_C f(z)dz = \oint_C f(z)dz$$

oder

$$\int_C f(z)dz = \oint_C f(z)dz.$$

<u>Beispiel:</u> Es sei C: $z = \varphi(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
Es gilt

$$\oint_C z^n dz = \begin{cases} 2\pi i & ,\quad n = -1 \\ 0 & ,\quad n \neq -1 \end{cases} \quad,\quad n \in \mathbb{Z}.$$

8.3

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion.
$g : G \to \mathbb{C}$ heißt Stammfunktion von f in G, wenn g in G holomorph ist und wenn $g' = f$ in G erfüllt ist.

Satz 3:
Die stetige Funktion f habe in G die Stammfunktion g. Es seien $a, b \in G$.
Es gilt:

$$\int\limits_C f(z)dz = g(b) - g(a)$$

für jeden Weg C, $|C| \subset G$, der a mit b verbindet.

Folgerung: Es sei f stetig im Gebiet G und besitze in G eine Stammfunktion. Dann gilt für jeden geschlossenen Weg C in G:

$$\oint\limits_C f(z)dz = 0.$$

Beispiele:

1) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ haben den Konvergenzradius r.

   g mit $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ist in $\{z / |z| < r\}$ eine Stammfunktion von f.

2) In $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist $g(z) = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{z^{n-1}}$, $n = 2, 3, \cdots$ Stammfunktion von $f(z) = \frac{1}{z^n}$, $n = 2, 3, \cdots$.

3) Da $\oint\limits_{|z|=r} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$ gilt, besitzt $f(z) = \frac{1}{z}$ in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ keine Stammfunktion.

4) $f(z) = \frac{1}{z}$ besitzt in $E_{-\pi} = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$, (7.2) die Stammfunktion

   $g(z) = \log(z) = \ln|z| + i \arg(z)$, $-\pi < \arg(z) < \pi$.

Kapitel 9

Der Integralsatz und die Integralformel von Cauchy für Sterngebiete

9.1

<u>Satz 1:</u> (Das Lemma von Goursat)
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $p \in G$. Es sei $f \in C(G) \cap H(G \backslash \{p\})$. Dann gilt für jedes abgeschlossene Dreieck $\triangle \subset G$:

$$\oint_{\partial\triangle} f(z)dz = 0.$$

<u>zum Beweis:</u>
Angenommen $\Big|\oint_{\partial\triangle} f(z)dz\Big| = \alpha > 0.$

Man konstruiert abgeschlossene Dreiecke $\triangle_j$ mit:

$$\triangle \supset \triangle_1 \supset \triangle_2 \supset \cdots \supset \triangle_n \supset \triangle_{n+1} \supset \cdots$$

die

$$(1) \quad \Big|\oint_{\partial\triangle_n} f(z)dz\Big| \geq \frac{\alpha}{4^n} \quad , n = 1, 2, \cdots$$

erfüllen.
Bezeichnen $d_n = diam(\triangle_n)$ und $l(\partial\triangle_n)$ die Länge von $\partial\triangle_n$, so folgt mit

$$(2) \quad d_n < \frac{1}{2^n}\, l(\partial\triangle) \quad \text{und} \quad d_n = \frac{1}{2^n}\, diam(\triangle) \quad n = 1, 2, \cdots$$

zunächst:

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} \triangle_j = \{z_o\}.$$

Nutzt man aus, dass f in z_o diff'bar ist, so erhält man mit (1) und (2):
Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\alpha \leq \varepsilon \, diam(\triangle) \, l(\partial\triangle)$$

Für $\varepsilon < \dfrac{\alpha}{diam(\triangle)\, l(\partial\triangle)}$ ist das falsch.

9.2 Der Integralsatz für Sterngebiete

Das Gebiet G heißt Sterngebiet, falls es in G einen Punkt a gibt mit:

$$(z \in G) \Rightarrow ([a,z] = \{\xi = a + t(z-a),\, 0 \leq t \leq 1\} \subset G).$$

Satz 2:
Es sei G ein Sterngebiet bezüglich a. Es sei $p \in G$. Dann hat jede Funktion $f \in C(G) \cap H(G \backslash \{p\})$ in G eine Stammfunktion.

zum Beweis: $\quad g(z) = \int\limits_{[a,z]} f(\xi) d\xi \quad , z \in G$, ist in G Stammfunktion von f.

Satz 3: (Cauchy Integralsatz für Sterngebiete)
Es sei G ein Sterngebiet und $p \in G$ und $f \in C(G) \cap H(G \backslash \{p\})$. Dann gilt für jeden geschlossenen Weg C in G:

$$\oint\limits_C f(z) dz = 0.$$

9.3 Die Cauchysche Integralformel für Kreise und Sterngebiete

Satz 4: (Die Integralformel für Kreise)
Es seien G ein Gebiet und $f \in H(G)$. Es seien $z_o \in G$ und $r > 0$ so, dass $\{z / |z - z_o| \leq r\} \subset G$. Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z_o| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad , z \in D(z_o, r).$$

zum Beweis:
Wähle zu $z \in D(z_o, r)$ $\;\delta > 0$ so, dass $D(z,\delta) \subset D(z_o, r)$ gilt.
Zeige:

$$\oint\limits_{|\xi - z_o| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \oint\limits_{|\xi - z| = \delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

und bilde $\lim\limits_{\delta \to 0}$.

Bemerkungen:

1) Für z mit $|z - z_o| < r$ gilt (setze oben $f = 1$):

$$\oint\limits_{|\xi - z_o| = r} \frac{1}{\xi - z}\, d\xi = 2\pi i.$$

2) Für $z = z_o$ in Satz 4 erhält man den Mittelwertsatz:

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_o + re^{it})dt.$$

Satz 5: (Die Integralformel für Sterngebiete)
Es seien G ein Sterngebiet, C ein geschlossener Weg in G und $f \in H(G)$. Dann hat man für $z \in G \setminus |C|$:

$$n(C, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \quad , z \notin |C|$$

wobei zur Abkürzung

$$n(C, z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{d\xi}{\xi - z}$$

gesetzt wurde. (Siehe Kap. 12)
(Ist C ein Kreis um z_o mit $|C| \subset G$, so gilt für z aus dem Innern des Kreises $n(C, z) = 1$).
zum Beweis:
Mit $z \in G$ beliebig, fest, $z \notin |C|$, wird der Satz 3 angewendet auf

$$g : G \to \mathbb{C},\ g(\xi) := \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & , \quad \xi \neq z \\[2ex] f'(z) & , \quad \xi = z. \end{cases}$$

Es ist $g \in C(G) \cap H(G \setminus \{z\})$.

Kapitel 10

Folgerungen

10.1 Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen

Satz 1: Es sei f holomorph im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und $z_o \in G$. Es sei $D(z_o, r)$ die größte Kreisscheibe um z_o, die in G liegt. Dann gilt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n \quad , z \in D(z_o, r),$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z_o| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_o)^{n+1}} \, d\xi \quad , n = 0, 1, 2 \cdots .$$

ρ ist beliebig mit $0 < \rho < r$.
zum Beweis:

1) O.B.d.A $z_o = 0$.

2) Mit $|\xi| = \rho$ und $|z| < \rho$ und $m \in \mathbb{N}$ hat man:

$$\frac{1}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{m} \frac{z^n}{\xi^{n+1}} + \left(\frac{z}{\xi}\right)^{m+1} \frac{1}{\xi - z} .$$

3) Mit der Cauchy Integralformel (9.3, Satz 4) gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi| = \rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \quad , |z| < \rho.$$

Setze 2) hier ein, setze a_n wie im Satz angegeben (mit $z_o = 0$). Man erhält:

$$|f(z) - \sum_{n=0}^{m} a_n z^n| = \Big|\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi|=\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\Big(\frac{z}{\xi}\Big)^{m+1} d\xi\Big|$$

$\to 0$ $(m \to \infty)$ mit $\left|\frac{z}{\xi}\right| < 1$ und Satz 2, 8. Kapitel.

Folgerungen:

1) Ist $f \in H(G)$, so gilt $f^{(n)} \in H(G)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

2)
$$f^{(n)}(z_o) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z_o|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_o)^{n+1}}\, d\xi \quad , n = 0, 1, 2, \cdots .$$

Mit 1) folgt leicht **der Satz von Morera:**
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in C(G)$. Für jedes abgeschlossene Dreieck $\triangle \subset G$ gelte

$$\oint\limits_{\partial\triangle} f(z)dz = 0.$$

Dann ist f auf G holomorph.
zum Beweis: Wähle $z_o \in G$ und $\delta > 0$ so, dass $D(z_o, \delta) \subset G$. In $D(z_o, \delta)$ ist

$$g(z) := \int\limits_{z_o}^{z} f(\xi)d\xi$$

(Integration längs der geradlinigen Verbindung von z_o nach z) Stammfunktion von f. Da mit g auch g' holomorph ist, ist f holomorph.

10.2 Der Identitätssatz

Satz 2: Es sei G ein Gebiet und $f \in H(G)$, $z_o \in G$. Aus $f(z) = 0$ für unendlich viele verschiedene sich in z_o häufende Punkte $z \in G$ folgt: $f(z) = 0$, $z \in G$.
zum Beweis:

1) Mit Satz 1 und den Voraussetzungen folgt
$$f^{(j)}(z_o) = 0 \quad , j = 0, 1, \cdots .$$
Somit gilt $f(z) = 0$ für $|z - z_o| < r$, $z \in G$.

2) Die Menge $G_o = \{z \in G / f^{(n)}(z) = 0,\ n = 0, 1, 2, \cdots\}$ ist nichtleer und offen. Hier wird wieder Satz 1 angewendet. $G_1 = G \backslash G_o$ ist offen, da $f^{(n)}$ stetig ist für jedes n. Da G als Gebiet zshgd ist, folgt $G_1 = \emptyset$ und somit $G = G_o$.

Bemerkungen:

1) Das Gebiet G enthalte das Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Es sei g eine auf I definierte Funktion. Dann: g lässt sich auf höchstens eine Weise ins Komplexe als holomorphe Funktion fortsetzen.

2) Aus $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ für $x \in \mathbb{R}$ folgt $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ für $z \in \mathbb{C}$.

3) Es sei G ein Gebiet, $f \in H(G)$, $f \neq konst.$
z_o heißt c - Stelle der Ordnung m, falls $f(z_o) = c$, $f^{(j)}(z_o) = 0$ $(j = 1, 2, \cdots, m-1)$, $f^{(m)}(z_o) \neq 0$.
Es gilt in der Umgebung einer c - Stelle der Ordnung m die Entwicklung
$$f(z) = c + (z - z_o)^m \Big(\sum_{l=0}^{\infty} a_{m+l}(z - z_o)^l \Big)$$
mit $a_m \neq 0$.

10.3 Ganze Funktionen. Der Satz von Liouville Der Fundamentalsatz der Algebra

f heißt ganze Funktion, wenn $f \in H(\mathbb{C})$. Das sind die Funktionen, die sich um jeden Punkt in eine Potenzreihe mit unendlichem Konvergenzradius entwickeln lassen.

Satz 3: (Der Satz von Liouville)
Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.

zum Beweis: Man geht aus von $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=r} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \, d\xi \quad \text{(Satz 1)}.$$

Mit $M(r) = \max\{|f(\xi)|, |\xi| = r\}$ folgt mit Satz 2, 8. Kapitel:
$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \quad , n = 0, 1, 2, \cdots, 0 < r < \infty.$$

Die Ungleichungen $(*)$ findet man auch unter dem Stichwort "Cauchysche Abschätzung".

Folgerung aus dem Satz von Louville:

Der Fundamentalsatz der Algebra:
Es sei p ein nichtkonstantes Polynom. Dann hat p in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle.
zum Beweis: Ist $p(z) \neq 0$ für alle z, so ist $f(z) := \dfrac{1}{p(z)}$ eine ganze Funktion, für die wegen $p(z) \to \infty$ für $z \to \infty$ gilt: $f(z) \to 0$ für $z \to \infty$. Hieraus folgt mit Satz 3, dass f konstant ist.

10.4 Die Gebietstreue

Hilfssatz:
Es sei f in einer Umgebung von $\overline{D(z_o, r)}$ holomorph. Es gelte
$|f(z_o)| < \min\{|f(z)|,\ |z - z_o| = r\}$. Dann hat f in $D(z_o, r)$ eine Nullstelle.
Beweis: mittels Widerspruch: mit Potenzreihenentwicklung von $\dfrac{1}{f(z)}$ um z_o und mit der Cauchyschen Abschätzung für $\dfrac{1}{f(z_o)}$.

Satz 4: (Gebietstreue)
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in H(G)$ und $f \neq konst$. Dann ist $f(G)$ ein Gebiet.
zum Beweis: mit dem Hilfssatz.

Kapitel 11

Das Maximumprinzip

11.1 Die Parsevalsche Formel

Satz 1: Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_o)^n$ holomorph in $\{z/ |z - z_o| < \rho\}$ $(0 < \rho \leq \infty)$. Es gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_o + re^{it})|^2 \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \quad (0 < r < \rho).$$

zum Beweis: Nachrechnen! Es werden Sätze verwendet über die Vertauschbarkeit von $\sum$ und $\int$, d.h. auch Sätze die Konvergenz von Potenzreihen betreffend.

11.2 Das Maximumprinzip

Satz 2: Es sei G ein Gebiet, $f \in H(G)$, $f \neq konst$. Dann nimmt $|f|$ in G kein Maximum an.
zum Beweis: Es wird gezeigt:
Zu jedem $z_o \in G$ gibt es ein $z_1 \in G$ mit $|f(z_o)| < |f(z_1)|$. Es wird der Satz 1 angewendet. Ist $D(z_o, r)$ eine Kreisscheibe mit $D(z_o, 2r) \subset G$, so liegt z_1 auf dem Kreis $\xi(t) = z_o + re^{it} \quad , 0 \leq t \leq 2\pi$.

Satz 3: Das Gebiet G sei beschränkt. Es sei $f \in H(G) \cap C(\overline{G})$. Dann gilt $|f(z)| \leq \max\{|f(\xi)|, \xi \in \partial G\} \quad , z \in G$. Hier gilt $'' ='' $ nur im Fall $f = konst$.
zum Beweis: Mittels Widerspruch und mit Satz 2.

Folgerung: Voraussetzungen wie für Satz 3.
Es gilt $Re(f(z)) \leq \max\{Re(f(\xi)), \xi \in \partial G\}$. Gleichheit gilt nur im Fall $f = konst$.

zum Beweis:
Setze $g(z) := \exp(f(z))$. Es gilt $|g(z)| = \exp(Ref(z))$. Wende Satz 3 auf $|g(z)|$ an. Beachte die Monotonie von exp und ln.

Bemerkung: Dies ist ein Satz zu harmonischen Funktionen.

11.3 Das Schwarzsche Lemma

Satz 4: Es sei f holomorph in $D = \{z/\,|z| < 1\}$ und es seien $f(0) = 0$ und $|f(z)| < 1$ für $z \in D$ erfüllt. Dann gelten:

$$|f(z)| \leq |z| \quad , z \in D, \quad \text{und} \quad |f'(0)| \leq 1.$$

Gilt $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in D$, so folgt $f(z) = e^{i\alpha}z$ mit einem $\alpha \in \mathbb{R}$.
zum Beweis:
Verwende die Potenzreihe von f um 0 und wende das Maximumprinzip auf $g(z) := \dfrac{f(z)}{z} \quad , z \in D$, $(g(0) = f'(0))$ an.

11.4 Die biholomorphen Abbildungen $D \to D$

1) Es sei $a \in D$ beliebig, fest.

   φ_a mit $\varphi_a(z) := \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ ist holomorph in einer offenen Kreischeibe, die

   $\overline{D} = \{z/\,|z| \leq 1\}$ enthält.

   Satz 5: $\varphi_a : D \to D$ und φ_a ist biholomorph. Es ist $\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}$. Es gelten: $\varphi_a(\partial D) = \partial D$, $\varphi_a'(0) = 1 - |a|^2$, $\varphi_a'(a) = \dfrac{1}{1-|a|^2}$.

2) Es sei $a \in D$ und $f \in H(D)$ mit $|f(z)| \leq 1$, $z \in D$. Es gilt:

   $$(1) \quad |f'(a)| \leq \frac{1-|f(a)|^2}{1-|a|^2}$$

   und: In (1) gilt die Gleichheit genau für

   $$(2) \quad f(z) = \varphi_{-f(a)}(c\,\varphi_a(z)) \quad , z \in D$$

   mit c konstant und $|c| = 1$.

<u>zum Beweis von (1), (2):</u>
Auf $g := \varphi_{f(a)} \circ f \circ \varphi_{-a}$ kann das Schwarzsche Lemma angewendet werden. Es gilt somit $|g'(0)| \leq 1$ zusammen mit einer Aussage, unter welchen Umständen Gleichheit vorliegt. Wird dies auf f umgerechnet, so erhält man (1), (2).

3) <u>**Satz 6:**</u>
Es sei $f : D \to D$ biholomorph mit $f(a) = 0$. Dann gilt $f = c\varphi_a$ mit einer Konstanten c mit $|c| = 1$.
<u>zum Beweis:</u>
Es sei g die inverse Funktion von f

$$(3) \quad g(f(z)) = z \quad , z \in D.$$

Wende (1), (2) mit f und a und mit g und $f(a) = 0$ an. Verwende (3).
Man erhält $|f'(a)| = (1 - |a|^2)^{-1}$.
Die Aussage (2) zur Gleichheit in (1) gibt die Behauptung.

Kapitel 12

Die Windungszahl

12.1

Die (Zusammenhangs)komponenten der offenen Menge $G \subset \mathbb{C}$ sind die maximalen zshgd. Teilmengen von G. Die Komponenten sind die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $\sim$ auf $G \times G$, die für $a, b \in G$ so definiert wird:

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad \text{a und b lassen sich in } G \text{ durch eine Kurve verbinden.}$$

Jede offene Menge ist disjunkte Vereinigung ihrer Komponenten. Jede Komponente ist ein Gebiet.

12.2

Ist C ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$, so heißen die Komponenten von $\mathbb{C}\backslash|C|$ auch die Komplementärgebiete von C. Da $\infty \notin |C|$, liegt ∞ in genau einem dieser Gebiete: dem Außengebiet von C. Bezeichnet man diese unbeschränkte Komponente von $\mathbb{C}\backslash|C|$ durch U, so hat man:

$$\{z/\,|z| > R\} \subset U \text{ für } R > 0 \text{ genügend groß.}$$

12.3 Die Windungszahl

Es sei $C \subset \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg. Die Windungszahl $n(C, z)$ von C bzgl $z \in \mathbb{C}\backslash|C|$ ist durch

$$n(C, z) := \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{1}{\xi - z}\, d\xi$$

definiert.

Satz 1: $n(C,z) \in \mathbb{Z}$
zum Beweis:
Ist C durch $\xi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ parametrisiert, ξ glatt, so ist mit

$$h(\tau) = \int_{\alpha}^{\tau} \frac{\dot{\xi}(t)}{\xi(t) - z}\, dt \quad , \alpha \leq \tau \leq \beta,$$

$g(\tau) = (\xi(\tau) - z) \exp(-h(\tau))$ auf $[\alpha, \beta]$ konstant. Hieraus folgt die Behauptung.

Satz 2: Ist C ein Weg in $\mathbb{C}$, so ist die Funktion

$$f : \mathbb{C} \backslash |C| \to \mathbb{C}$$

mit $f(z) := \int\limits_C \frac{d\xi}{\xi - z}$ stetig.

Satz 3: Es sei C ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$. Es gelten:

1) Ist U eine Komponente von $\mathbb{C} \backslash |C|$, so ist $f : U \to \mathbb{C}$, $f(z) := \oint\limits_C \frac{d\xi}{\xi - z}$, konstant.
2) $n(C,z) = 0$ für z aus der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \backslash |C|$.

Bemerkung/Übung:

1) C sei geschlossener Weg. Dann gilt:

$$n(C,a) = -n(-C,a) \quad , a \notin |C|.$$

2) C_1, C_2 seien geschlossene Wege mit demselben Anfangspunkten. Für $a \notin |C_1| \cup |C_2|$ gilt:

$$n(C_1 + C_2, a) = n(C_1, a) + n(C_2, a).$$

3) Ist C ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$, so heißen die Mengen

$$int(C) := \{z \in \mathbb{C} \backslash |C| / \, n(C,z) \neq 0\},$$
$$ext(C) := \{z \in \mathbb{C} \backslash |C| / \, n(C,z) = 0\}$$

heißen das Innere bzw. das Äußere von C.

3.1 Es ist

$$\mathbb{C} = int(C) \cup |C| \cup ext(C)$$

eine disjunkte Zerlegung von $\mathbb{C}$.

3.2 Es gelten

$$\partial(int(C)) \subset |C| \quad , \quad \partial(ext(C)) \subset |C|$$

3.3 und für $D = D(z_o, r)$

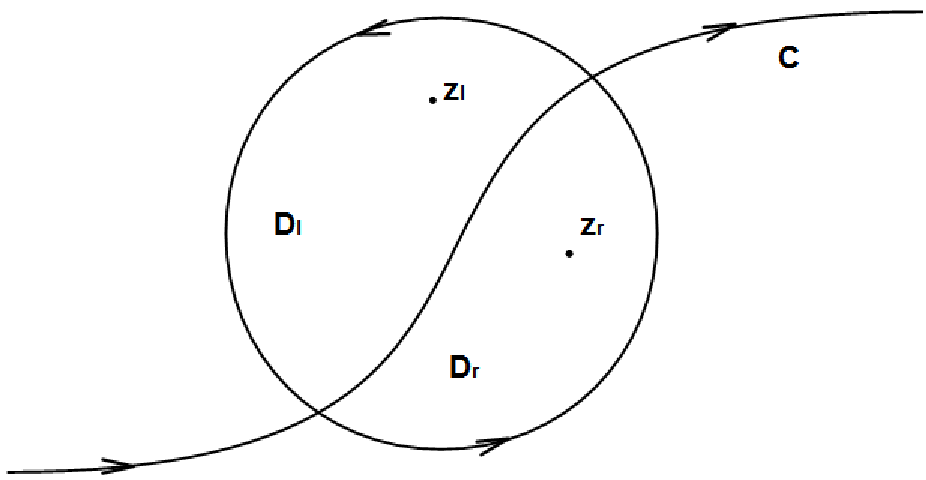
$$int(\partial D) = D \quad , \quad ext(\partial D) = \mathbb{C} \backslash \overline{D},$$

$$\partial(int(\partial D)) = \partial(ext(\partial D)) = \partial D.$$

3.4 $int(C)$ ist beschränkt, $ext(C)$ ist nichtleer und unbeschränkt: Aus $|C| \subset D(z_o, r)$ folgen $int(C) \subset D(z_o, r), \mathbb{C} \backslash D(z_o, r) \subset ext(C)$.

12.4 (Verkehrsregel) zur Berechnung der Windungszahl

Satz 4: Der geschlossene Weg C zerlege die Kreisscheibe D in zwei Gebiete D_l und D_r.



Es gilt

$$n(C, z_l) = n(C, z_r) + 1 \quad , z_l \in D_l \quad , z_r \in D_r$$

("Vorfahrtsregel").

Kapitel 13

Die Cauchysche Integralformel und der Cauchysche Integralsatz

13.1

Satz 1: (Die Integralformel) Es seien $G \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. C sei ein geschlossener Weg in G. Es sei $n(C, w) = 0$ für $w \in \mathbb{C} \backslash G$ erfüllt. Dann gilt für $z \in G \backslash |C|$

$$n(C, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi.$$

zum Beweis:
1. Schritt: Es ist $H := \{w \in \mathbb{C} / \, n(C, w) = 0\}$ eine offene Menge, und es gilt $H \cup G = \mathbb{C}$.
2. Schritt: $g : G \times G \to \mathbb{C}$ mit:

$$g(\xi, z) := \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & , \quad \xi \neq z \\[2ex] f'(z) & , \quad \xi = z. \end{cases}$$

ist stetig auf $G \times G$.
Beim Nachweis der Stetigkeit in $(z_o, z_o) \in G \times G$ mit $(\xi, z) \to (z_o, z_o)$ mit $\xi \neq z$ verwendet man

$$g(\xi, z) - g(z_o, z_o) = \frac{1}{\xi - z} \int_z^\xi (f'(w) - f'(z_o)) \, dw$$

(Integration längs der Verbindungsstrecke) und die Stetigkeit von f'.

<u>3. Schritt:</u> $h_o(z) := \oint\limits_C g(\xi, z)\, d\xi \quad , \ z \in G$, ist holomorph. Dies wird mit dem Satz von Morera (10.1) gezeigt. Es werden verwendet: der Satz von Fubini und das Lemma von Goursat (Satz 1 in 9.1).

<u>4. Schritt:</u> Für $z \in G \cap H$ gilt

$$h_o(z) = \oint\limits_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi =: h_1(z).$$

<u>5. Schritt:</u> Es ist h_1 auf H holomorph. Das ist ein Spezialfall des folgenden Satzes: Ist C ein Weg in der offenen Menge U und p eine auf $|C|$ stetige Funktion, so ist

$$\lambda(z) := \int\limits_C \frac{p(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

auf $U \backslash |C|$ holomorph mit

$$\lambda^{(n)}(z) = n! \int\limits_C \frac{p(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi \quad , \ z \in U \backslash |C| \, , \ n \in \mathbb{N}.$$

Diesen Satz haben wir mittels Potenzreihenentwicklung des Integranden bewiesen.

<u>6. Schritt</u>

$$h(z) := \begin{cases} h_o(z) & , \quad z \in G \\ h_1(z) & , \quad z \in H. \end{cases}$$

ist eine ganze beschränkte (es gilt $h_1(z) \to 0$, $z \to \infty$) Funktion, die also nach dem Satz von Louville (10.3) konstant ist. Wegen $h(z) \to 0$ für $z \to \infty$ gilt somit $h(z) = 0$, $z \in G$, also auch $h_o(z) = 0$ für $z \in G \backslash |C|$. Das ist die Behauptung des Satzes.

13.2 Verallgemeinerung von Satz 1

Satz 2: Es sei $G \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f \in H(G)$.

$$(V)\left\{\begin{array}{l} C_1, \cdots, C_m \text{ seinen geschlossene Wege in } G \text{ mit} \\[2ex] \qquad \displaystyle\sum_{j=1}^{m} n(C_j, w) = 0 \text{ für } w \in \mathbb{C}\backslash G. \end{array}\right.$$

Dann gilt für $z \in G\backslash \bigcup\limits_{j=1}^{m} |C_j|$

$$\Big(\sum_{j=1}^{m} n(C_j, z)\Big) f(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_j} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

zum Beweis: Der Beweis geht wie der von Satz 1. $g = g(\xi, z)$ wird wie dort definiert. Jetzt ist

$$H = \{w / \sum_{j=1}^{m} n(C_j, w) = 0\}$$

und

$$h_o(z) = \sum_{j=1}^{m} \oint\limits_{C_j} g(\xi, z)\, d\xi \quad , z \in G.$$

13.3 Der Cauchysche Integralsatz

Satz 3: (V) wie in Satz 2.

Dann gilt $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \oint\limits_{C_j} f(\xi) d\xi = 0.$

zum Beweis:

Wähle $a \in G\backslash \bigcup\limits_{j=1}^{m} |C_j|$. Setze $F(z) := (z - a) f(z)$.

Nach Satz 2 gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{m} \oint\limits_{C_j} f(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{m} \oint\limits_{C_j} \frac{F(\xi)}{\xi - a}\, d\xi = \Big(\sum_{j=1}^{m} n(C_j, a)\Big) F(a) = 0$$

13.4 Beispiele

1) Es sei G offene Menge, C ein geschlossener Jordanweg in G mit $int(C) \subset G$ und $f \in H(G)$. Dann gilt:

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

2) Es sei $f \in H(G)$. $G = \{z/\, R_1 < |z| < R_2\}$. Wähle r_1, r_2 mit $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ und bezeichne

$$C_1 : \xi_1(t) = r_1 e^{it}\,,\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$C_2 : \xi_2(t) = r_2 e^{it}\,,\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

Mit Satz 3 folgt

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$

Es seien $z \in G$ und r_1, r_2 so, dass $R_1 < r_1 < |z| < r_2 < R_2$ erfüllt ist. Mit Satz 2 folgt:

Satz 4: (Cauchy Integralformel für den Kreisring)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi.$$

3) Eine Anwendung von 1) oben gibt:
Ist C ein positiv orientierter geschlossener Jordanweg, so gilt für $z \in int(C)$:

$$n(C,z)\ (= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{d\xi}{\xi - z}) = 1$$

Man weist hierzu nach, dass

$$\oint_C \frac{d\xi}{\xi - z} = \oint_K \frac{d\xi}{\xi - z}$$

gilt, wobei K der positiv orientierte Rand eines Kreises um z ist, der $K \subset int(C)$ erfüllt.

4) Eine Anwendung von Satz 3 liefert das folgende Ergebnis: $C_o, C_1, ..., C_m$ seien geschlossene Jordanwege. $C_1, ..., C_m$ liegen alle im Innengebiet von C_o, jeder der Wege $C_1, ..., C_m$ liegt im Innengebiet von C_o, und

jeder der Wege $C_1, ..., C_m$ liegt im Außengebiet aller anderen ($int\ (C_j) \cap int\ (C_l) = \emptyset\,, j \neq l\,, j\,, l$=1,...,m). Dann gilt

$$\oint_{C_o} f(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \oint_{C_j} f(z)dz\,,$$

falls $C_o, C_1, ..., C_m$ und das Ringgebiet zwischen C_o und den $C_j (j = 1, ..., m)$ ganz in einer offenen Menge G liegen, in der f holomorph ist, und falls $C_o, C_1, ..., C_m$ in demselben Sinn orientiert sind. Zeige: Für $w \notin G$ gilt $n(C_o, w) + \sum_{j=1}^{m} n(-C_j, w) = 0$. Man wende Satz 3 auf $C_o, -C_1, ..., -C_m$ an.

Kapitel 14

Die Laurent Entwicklung

14.1

a_n, $n \in \mathbb{Z}$, sind gegebene komplexe Zahlen.

$$(*) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_o)^n$$

heißt <u>Laurent Reihe um z_o</u>.

$(*)$ heißt konvergent in z, falls für z

(1) $\quad h(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_o)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_o)^{-n}$

und

(2) $\quad r(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_o)^n$

konvergieren.

Liegt Konvergenz vor, so wird

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_o)^n = h(z) + r(z)$$

(Hauptteil und Nebenteil) geschrieben.

Da $h(z)$ eine Potenzreihe in $\dfrac{1}{z-z_o}$ und $r(z)$ eine Potenzreihe ist, können wir die früher bereitgestellten Ergebnisse zu Potenzreihen anwenden. Man erhält so leicht den:

Satz 1 Es seien $\frac{1}{R_1}$ der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$ und R_2 der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dann hat man:

1. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ ist konvergent für alle z mit $R_1 < |z| < R_2$.

2. Im Fall $R_1 < R_2$ ist die durch $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ auf $A = \{z/\, R_1 < |z| < R_2\}$ definierte Funktion f in A holomorph.

Bemerkung: In den Anwendungen (siehe auch die nächsten Kapitel) tritt hauptsächlich der Fall $R_1 = 0$ auf: A ist die "punktierte" Kreischeibe

$$D'(0, R_2) = \{z/\, 0 < |z| < R_2\}$$

14.2 Die Laurent Entwicklung

Satz 2 Es seien R_1, R_2 Zahlen mit $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$. Mit

$A = \{z/\, R_1 < |z - z_o| < R_2\}$ sei $f \in H(A)$ gegeben. Dann gilt für $z \in A$ die Darstellung (als Laurentreihe)

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_o)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z_o| = \varrho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_o)^{n+1}}\, d\xi\,,\ n \in \mathbb{Z}.$$

ϱ ist beliebig mit $R_1 < \varrho < R_2$.
zum Beweis: Vorgehen wie in Satz 1, 10.1, ausgehend von der Cauchy Intergralformel für den Kreisring, Satz 4, 13.4. Dass die Integrale für die Koeffizienten mittels eines Kreises $\{z/\, |z - z_o| = \varrho\}$ ausgerechnet werden können, folgt aus 2), 13.4.

Bemerkung:
Die Laurent Reihe von f um z_o in $A := \{z/\, R_1 < |z - z_o| < R_2\}$ ist eindeutig bestimmt:
Aus $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_o)^n$, $z \in A$, folgt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z_o| = \varrho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_o)^{n+1}}\, d\xi\,,\ n \in \mathbb{Z},$$

mit ϱ beliebig aus (R_1, R_2).

14.3 Beispiele:

1) $a, b \in \mathbb{C}$, $0 < |a| < |b| < \infty$, seien gegeben.
   Gesucht sind für $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ die Laurent Reihen um $z_o = 0$.

   f ist holomorph in $R_1 = \{z / \, |z| < |a|\}$
   f ist holomorph in $R_2 = \{z / \, |a| < |z| < |b|\}$
   f ist holomorph in $R_3 = \{z / \, |b| < |z|\}$
   Satz 2 und Bemerkung liefern:
   Die Reihe in R_1: $f(z) = \dfrac{1}{a-b} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \big(\dfrac{1}{b^{n+1}} - \dfrac{1}{a^{n+1}} \big) z^n$
   Die Reihe in R_2: $f(z) = \dfrac{1}{a-b} \big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^{n-1}}{z^n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^{n-1}}{b^n} \big)$
   Die Reihe in R_3: $f(z) = \dfrac{1}{a-b} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^{n-1} - b^{n-1}}{z^n}$

2) (Ü) Berechne für $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ die Entwicklungen um $z_o = 3$.
   Gib jeweils den Konvergenzbereich an.

3) Laurentreihe von $\dfrac{(z+1)^2}{z}$ für $|z| > 0$ ist $\dfrac{1}{z} + 2 + z$.

4) Gib die verschiedenen Entwicklungen um $z_o = 0$ und $z_o = 1$ an für $f(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z)}$.

Kapitel 15

Die isolierten Singularitäten

15.1 Isolierte Singularität. Hebbare Singularität.

Es seien $G \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $a \in \mathbb{C}$. Gilt $f \in H(G\backslash\{a\})$, so besitzt f in a eine isolierte Singularität.
Gibt es eine Funktion $g \in H(G)$ mit $g(z) = f(z)$, $z \in G\backslash\{a\}$, so heißt a hebbare Singularität von f. g ist holomorphe Fortsetzung von f von $G\backslash\{a\}$ auf G.

Satz 1: Es gelte $f \in H(G\backslash\{a\})$, und f sei auf $D'(a,r) = \{z/\, 0 < |z-a| < r\}$ $(\subset G)$ beschränkt. Dann ist a eine hebbare Singularität für f.
zum Beweis:

$$h(z) := \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & , \quad z \in G\backslash\{a\} \\ \\ 0 & , \quad z = a \end{cases}$$

ist holomorph in G. Die Potenzreihe für h um a gibt eine Potenzreihe für f, die in a konvergiert.

15.2 Hebbare Singularität, Polstelle, wesentliche Singularität

Satz 2: Es sei $a \in G$ und $f \in H(G\backslash\{a\})$. Dann liegt genau einer der drei folgenden Fälle vor:

1) f hat in a eine hebbare Singularität.

2) Es gibt Zahlen $c_1, c_2, ..., c_m \in \mathbb{C}$, $c_m \neq 0$, derart, dass $f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$ in a eine hebbare Singularität hat.

3) Für jedes $r > 0$ mit $D(a,r) \subset G$ liegt $f(D'(a,r))$ dicht in $\mathbb{C}$.

Bemerkung:
a heißt Pol m-ter Ordnung, falls 2) eintritt.
a heißt wesentliche Singularität, falls 3) eintritt.
zum Beweis des Satzes:
3) liegt nicht vor:
Es existiert dann ein $r > 0$, ein $w \in \mathbb{C}$ und $\delta > 0$ mit $|f(z) - w| \geq \delta$ für alle $z \in D'(a,r)$.
Es ist dann $g(z) := \dfrac{1}{f(z) - w}$ in $D'(a,r)$ holomorph und holomorph nach $D(a,r)$ fortsetzbar.
Gilt $g(a) \neq 0$, so liegt 1) vor für f. Gilt $g(a) = 0$ und ist a eine Nullstelle $m-$ter Ordnung, so liegt 2) vor für f.

15.3 Die Laurent Entwicklung um isolierte Singularitäten

Es sei a eine isolierte Singularität der Funktion f: f ist holomorph in $D'(a,r) = \{z/\, 0 < |z-a| < r\}$.
Mit Satz 2, Kapitel 14 (Laurent-Entwicklungssatz) erhalten wir eindeutig die Darstellung für $f(z)$, $z \in D'(a,r)$:

$$(*) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n \, , \; 0 < |z-a| < r$$

<u>Satz 3:</u> f habe in a eine isolierte Singularität. Dann gelten in Zusammenhang mit $(*)$: a ist

1) eine hebbare Singularität $\Leftrightarrow a_{-n} = 0$, $n = 1, 2, ...$
2) eine Polstelle $m-$ter Ordnung $\Leftrightarrow a_{-m} \neq 0$, $a_{-n} = 0$ für $n > m$, $n \in \mathbb{N}$.
3) eine wesentliche Singularität $\Leftrightarrow a_{-n} \neq 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.
   <u>zum Beweis:</u> Verknüpfe $(*)$ mit Satz 2 / Satz 1.

<u>Beispiele:</u>

$$f(z) = \frac{1}{sin^2 z}\,,\; z = 0,$$

$$f(z) = \exp(\frac{1}{z})\,,\; z = 0.$$

Kapitel 16

Der Residuensatz

16.1

$Res(f;z_o)$ <u>Residuum von f in z_o</u>.

Es sei G eine offene Menge in $\mathbb{C}$ und $z_o \in G$. Es sei $f \in H(G \backslash \{z_o\})$ und $r > 0$ mit $D(z_o, r) \subset G$ und $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_o)^n$ die Laurentreihe von $f(z)$ in $0 < |z - z_o| < r$.

$$Res(f;z_o) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z_o| = \varrho} f(\xi)\, d\xi \quad (0 < \varrho < r).$$

<u>Satz 1:</u>

a) f habe in z_o einen Pol der Ordnung k ($\in \mathbb{N}$). Es gilt

$$Res(f;z_o) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_o} D^{k-1}\big((z - z_o)^k f(z)\big)$$

b) Für $f(z) = \dfrac{A(z)}{B(z)}$ mit A, B holomorph in z_o, $A(z_o) \neq 0$, $B(z_o) = 0$, $B'(z_o) \neq 0$ gilt

$$Res(f;z_o) = \frac{A(z_o)}{B'(z_o)}.$$

Beispiele:

1) $f(z) = \dfrac{-z}{(z-1)(z-2)}$. $\quad z_1 = 1\,,\ z_2 = 2$ sind Polstellen 1. Ordnung.
Mit a) mit $k = 1$ oder mit b) erhält man leicht:

$$Res(f;1) = 1\,,\ Res(f;2) = -2$$

2) $f(z) = exp(\frac{1}{z})$ hat in $z = 0$ eine wesentliche Singularität.

Aus der Laurentreihe liest man ab:

$$Res(f;0) = 1.$$

3) $f(z) = \dfrac{1}{sin^2 z}$ hat in $z_k = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ Polstellen zweiter Ordnung.

$Res(f;0) = 0$. Das sieht man leichter mittels der Laurentreihe als mit Satz 1 a), $k = 2$.
(siehe auch Beispiele zu Satz 3 / 15. Kapitel).

4) $Res(\frac{f'}{f}; z_o) = N$, falls f in z_o eine $N-$fache Nullstelle hat.

5) $Res(\frac{f'}{f}; z_o) = -N$, falls f in z_o eine $N-$fache Polstelle hat.

16.2 Der Residuensatz

Satz 2 Es seien G eine offene Menge und $a_1, a_2, ..., a_m \in G$ isolierte Singularitäten von $f \in H(G\backslash\{a_1, a_2, ..., a_m\})$. Es sei C ein geschlossener Weg in G, auf dem keine der Singularitäten liegt und für den $n(C, w) = 0$ für $w \in \mathbb{C}\backslash G$ erfüllt ist.
Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{m} n(C, a_k) Res(f; a_k).$$

zum Beweis:
Es wird Satz 3 aus dem 13. Kapitel angewendet mit $G\backslash\{a_1, ..., a_m\}$ anstelle von G (dort) und $C, C_1, ..., C_p$ anstelle von $C, C_1, ..., C_m$ (dort). Hier sind C_j $(j = 1, ..., p; 1 \leq p \leq m)$ Kreislinien um die a_j, für die $n(C, a_j) \neq 0$ gilt.
Die C_j sind geeignet orientiert, für sie sind $int(C_j) \cap int(C_k) = \emptyset\,(j \neq k)$ und $\overline{int(C_j)} \subset G \quad (j = 1, ..., p)$ erfüllt.

<u>Satz 3</u> (Spezialfall von Satz 2) (vergleiche 13.4, 4))
Es seien G eine offene Menge und C ein geschlossener Jordanweg in G mit $int(C) \subset G$. Es sei f holomorph in G außer in isolierten Singularitäten, von denen $a_1, a_2, ..., a_m$ in $int(C)$ liegen. Dann gilt

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} Res(f; a_j)$$

Kapitel 17

Berechnung reeller Integrale mit Hilfe des Residuensatzes

17.1

Satz 1 Es sei $R = R(x, y)$ eine rationale Funktion, $R(\cos t, \sin t)$ sei für $t \in [0, 2\pi]$ definiert. Dann gilt:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = 2\pi i \sum_j Res(f; a_j)$$

Die a_j sind die Polstellen in $|z| < 1$. Es ist

$$f(z) = \frac{1}{iz} R\Big(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})\Big).$$

zum Beweis:
Setze $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$, $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$ und $e^{it} = z$.

Beispiel: Es sei $a > 1$ eine feste Zahl. Es gilt

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{a + \cos t} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

17.2

Satz 2: Es sei f eine rationale Funktion ohne Pole auf der reellen Achse. Für f sei erfüllt:
$(*)$ Grad Nennerpolynom − Grad Zählerpolynom ≥ 2.
Sind $z_1, z_2, ..., z_m$ die Polstellen von f in der oberen Halbebene, so gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} Res(f; z_j).$$

zum Beweis:
Betrachte für $r > 0$ $\quad C_r := [-r, +r] \cup \{z = re^{it}\,,\, 0 \leq t \leq \pi\}$ und wähle r so groß, dass $z_1, z_2, ..., z_m \in int(C_r)$. Nach dem Residuensatz gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} f(z)dz = \sum_{j=1}^{m} Res(f; z_j)$$

Mit der Voraussetzung $(*)$ folgt

$$\lim_{r\to\infty} \oint_{C_r} f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

und $(*)$ gewährleistet ebenfalls, dass $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ existiert.

Beispiel:

1) Die Nullstellen von $z^n + 1$ $(n \in \mathbb{N})$ sind

$$z_k = exp(i\frac{\pi}{n} + 2\frac{k-1}{n}\pi i) \quad , \quad k = 1, 2, ..., n.$$

In den z_k hat $\dfrac{1}{1+z^n}$ einfache Polstellen mit den Residuen
$Res(f; z_k) = -\dfrac{z_k}{n}$, $k = 1, 2, ..., n$.

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{2}$ mit Satz 2 und 1) vorher.

17.3 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}\,dx$

Satz 3: Es sei f eine rationale Funktion mit:
Grad des Nennerpolynoms − Grad des Zählerpolynoms ≥ 1.
f habe auf $\mathbb{R}$ keine Pole außer in $z = 0$ einen Pol höchstens erster Ordnung.
$z_1, z_2, ..., z_m$ seien die Pole in $\{z/\, Im(z) > 0\}$. Es gilt

$$HW \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}\,dx = \pi i Res(f;0) + 2\pi i \sum_{j=1}^{m} Res\big(f(z)e^{iz}; z_j\big)$$

zum Beweis:
Wende den Residuensatz an auf den Rand des Rechtecks mit den Ecken $X_2, X_2 + iY, -X_1 + iY, -X_1$ (mit $X_1, X_2, Y > 0$) . Auf der Strecke $[-X_1, X_2]$ wird das Stück $[-\delta, \delta]$ durch die Halbkreislinie von $-\delta$ nach δ um Null in der oberen Halbebene ersetzt. Bilde $X_1, X_2, Y \to \infty$ und $\delta \to 0$. Es bleiben nur Integrale über die reelle Achse übrig und

$$\lim_{\delta \to 0} -i \int\limits_{0}^{\pi} f(\delta e^{it}) e^{i\delta e^{it}} \delta e^{it}\,dt = -i\pi Res(f;0)$$

Beispiel:
Ist f ungerade. Mit $I = HW \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}\,dx$ von Satz 3 gilt:

$$\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\sin x\,dx = \frac{I}{2i} = \frac{\pi}{2} Res(f;0) + \pi \sum_{j=1}^{m} Res\big(f(z)e^{iz}, z_j\big).$$

Mit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ erhält man: $\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{sinx}{x}\,dx = \dfrac{\pi}{2}.$

Kapitel 18

Das Argumentprinzip
Der Satz von Rouché

18.1

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge.
$f : G \to \mathbb{C}$ heißt meromorph in G, wenn f in G bis auf Pole holomorph ist.

Bemerkung:
Eine meromorphe Funktion hat in einem beschränkten Gebiet höchstens endlich viele Pole. (Begründung !?).

18.2

Satz 1: (Das Argumentprinzip)
Es sei G eine offene Menge und $\widetilde{C}$ ein geschlossener Jordanweg in G mit $int(\widetilde{C}) \subset G$. Es sei f meromorph in G. Es seien z_k die Nullstellen, ξ_l die Polstellen von f, jeweils der Ordnung entsprechend gezählt. Es sei C ein geschlossener Weg in $int(\widetilde{C})$ auf dem weder Nullstellen noch Pole von f liegen. Wenn $f(C)$ der Bildweg ist, so gelten:

$$n(f(C);0) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \overset{(2)}{=} \sum_k n(C, z_k) - \sum_l n(C, \xi_l)$$

zum Beweis:
zu (1): Definition von $n(f(C);0)$ und Definition von Linienintegral, insbesondere von $\oint\limits_C$ und $\oint\limits_{f(C)}$.
zu (2): mit Beispiel $4a$), $4b$) in 16.1 und mit dem Residuensatz.

Satz 1' Es sei G ein Gebiet und f meromorph in G. Es sei D_o eine Kreisscheibe mit $\overline{D_o} \subset G$, und es gelte $f \neq 0, \infty$ auf ∂D_o. Die der Ordnung entsprechend oft gezählte Anzahl der Nullstellen bzw der Polstellen von f in D_o wird durch N bzw P bezeichnet. Es gilt dann

$$n(f(\partial D_o); 0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D_o} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N - P.$$

zum Beweis: Umformulierung/Spezialisierung von Satz 1.

18.3 Der Satz von Rouché

Es sei G ein Gebiet und D_o eine Kreisscheibe mit $\overline{D_o} \subset G$.
Für f, $g \in H(G)$ sei
(1) $|g(z)| < |f(z)|$ für $z \in \partial D_o$ erfüllt.
Dann haben die Funktionen f und $f + g$ in D_o gleichviele Nullstellen, der Ordnung entsprechend oft gezählt.
zum Beweis:

$$h(z) := \frac{f(z) + g(z)}{f(z)} = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$$

ist meromorph in G.
Aus (1) folgt leicht: $h(z) \neq 0, \infty$ auf ∂D_o.

Die Differenz der Anzahl der Nullstellen von $f + g$ und f ist gleich der Differenz der Anzahl der Nullstellen und Polstellen von h, also nach Satz 1'
$= n(h(\partial D_o); 0)$
Wegen $|h(z) - 1| = |\frac{g(z)}{f(z)}| < 1$, $z \in \partial D_o$,

gilt $h(\partial D_o) \subset \{w / \, |w - 1| < 1\}$. Also:
0 liegt in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $h(\partial D_o)$ und das heißt $n(h(\partial D_o); 0) = 0$, und das ist die Behauptung.

Beispiel:

1) Fundamentalsatz der Algebra

   $p(z) = a_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ mit $n \geq 1$, $a_n \neq 0$.

   Mit $f(z) = a_n z^n$, $g(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ gilt für genügend großes r:
   $|g(z)| < |f(z)|$, $|z| = r$.
   Nach dem Satz von Rouché, da f in $|z| < r$ genau n Nullstellen hat, hat somit $p = f + g$ in $|z| < r$ genau n Nullstellen.

2) (Ü) $p(z) = 3z^3 - 2z^2 + 2iz - 8$ hat die drei Nullstellen in $1 < |z| < 2$.