20.04.2016
Prof. Dr. Tobias Lamm
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Funktionentheorie

1. Übungsblatt

Bemerkung zu komplex differenzierbar und holomorph
Auf diesem Übungsblatt soll an manchen Stellen gezeigt werden, dass komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie nicht immer übereinstimmen. Eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$, heißt holomorph in einem Punkt $z_0 \in \Omega$, falls es einen Radius $\varepsilon > 0$ gibt so, dass $B_\varepsilon(z_0) \subseteq \Omega$ und die Einschränkung $f|_{B_\varepsilon(z_0)}$ in jedem Punkt von $B_\varepsilon(z_0)$ komplex differenzierbar ist. Ist $\emptyset \neq U \subseteq \Omega$, so heißt f holomorph auf U, falls f in jedem Punkt $z_0 \in U$ holomorph ist. Hieraus ergibt sich sofort, dass die Menge U offen sein muss. Allgemein muss die Menge der Punkte in denen eine Funktion holomorph ist offen sein.
Falls es noch Fragen oder Unklarheiten dazu gibt, scheuen Sie sich nicht vorbeizukommen.

Aufgabe 1 ((Ü) Verschärfung von Lemma von Goursat)

Zeigen Sie die folgende Aussage: Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und es gebe einen Punkt $z_0 \in U$ so, dass f auf $\Omega\backslash\{z_0\}$ holomorph ist. Dann gilt für jedes Dreieck $\Delta \subseteq \Omega$

$$\int_{\partial\Delta} f \mathrm{d}z = 0.$$

Aufgabe 2 ((T) Wiederholung: Kurvenintegrale in $\mathbb{C}$)

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ ein beliebiger Punkt. Berechnen Sie für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle Radien $r > 0$ das Kurvenintegral

$$\int_{\partial B_r(z_0)} (z - z_0)^k \, \mathrm{d}z.$$

Aufgabe 3 ((T) Anwendungen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen)

Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion, sowie $f = u + \mathrm{i}v$. Zeigen Sie:

a. Seien u, v zweimal stetig differenzierbar und f komplex differenzierbar auf Ω, so sind u und v harmonisch auf Ω, d.h. $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0$.

b. Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und Ω soll gegeben sein durch $\Omega = I + \mathrm{i}J := \{z \in \mathbb{C} | \ \mathrm{Re}(z) \in I, \ \mathrm{Im}(z) \in J\}$, weiter sei $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und harmonisch (d.h. $\Delta u = 0$) auf Ω. Zeigen Sie, dass dann eine holomorphe Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ existiert mit $\mathrm{Re}(f) = u$.

c. Die Äquivalenz: f ist lokal-konstant $\Leftrightarrow$ f ist komplex differenzierbar auf Ω mit $f'(z) = 0$ für $z \in \Omega$.

d. Ist f komplex differenzierbar auf Ω und f nur reell (d.h. $v = 0$) oder nur imaginär (d.h. $u = 0$), dann ist f lokal-konstant.

Dabei nennen wir eine Funktion f lokal-konstant, falls es um jeden Punkt $z_0 \in \Omega$ eine Umgebung $U_0 \subseteq \Omega$ gibt, so, dass die Einschränkung $f|_{U_0}$ konstant ist auf U_0.

Aufgabe 4 ((T) Beispiele)

Geben Sie immer mindestens eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an mit folgender Eigenschaft:

a. in überabzählbar vielen Punkten komplex differenzierbar, aber nirgends holomorph.

b. stetig reell differenzierbar, aber nirgends komplex differenzierbar.

c. stetig reell differenzierbar, aber nur in einem Punkt komplex differenzierbar.

Sind Potenzreihen $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ komplex differenzierbar bzw. holomorph? Wenn ja, in welchen Punkten?

Aufgabe 5 ((T) Weiteres zum Wirtinger-Kalkül)

In dieser Aufgabe soll es um den in der Übung eingeführten Wirtinger-Kalkül gehen. Dabei sollen elementare Rechenregel bewiesen werden.

a. Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$, eine Funktion und $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \Omega$ ein Punkt. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   a1. f ist reell differenzierbar in $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$.

   a2. Es gibt zwei in z_0 stetige Funktionen $\widehat{f_1}, \widehat{f_2}\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\widehat{f_1}(z) + (\overline{z} - \overline{z_0})\widehat{f_2}(z) \text{ für } z \in \Omega.$$

   a3. Es gibt zwei in z_0 stetige Funktionen $f_1, f_2\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0) + (x - x_0)f_1(z) + (y - y_0)f_2(z) \text{ für } z = x + \mathrm{i}y \in \Omega.$$

   In diesem Fall gilt: $\widehat{f_1}(z_0) = f_z(z_0)$, $\widehat{f_2}(z_0) = f_{\overline{z}}(z_0)$, $f_1(z_0) = f_x(z_0)$, $f_2(z_0) = f_y(z_0)$ und $\det(Df(z_0)) = |f_z(z_0)|^2 - |f_{\overline{z}}(z_0)|^2$, d.h. $Df(z_0) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist invertierbar genau dann, wenn $|f_z(z_0)| \neq |f_{\overline{z}}(z_0)|$ ist.

b. Zeigen Sie: Die Wirtinger-Differentiale $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ erfüllen die Summen-, Produkt- und Quotientenregel.

c. Zeigen Sie, dass die Gesetze $\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}$, $\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}}$, $\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = 0$ gelten.

d. Zeigen Sie die Äquivalenz: $\overline{f}$ in $z_0 \in \Omega$ komplex differenzierbar $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 0$ und in diesem Fall ist $\overline{f}'(z_0) = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(z_0)$.

e. Zeigen Sie die Kettenregel für $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$: Seien $g\colon \Omega' \to \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $\emptyset \neq \Omega', \Omega \subseteq \mathbb{C}$, reell differenzierbar auf Ω' bzw. Ω mit $g(\Omega') \subseteq \Omega$. Dann ist auch $f \circ g\colon \Omega' \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar und es gilt für alle $z_0 \in \Omega'$:

$$\frac{\partial (f\circ g)}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z_0)) \cdot \frac{\partial g}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g(z_0)) \cdot \overline{\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z_0)},$$
$$\frac{\partial (f\circ g)}{\partial \overline{z}}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z_0)) \cdot \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g(z_0)) \cdot \overline{\frac{\partial g}{\partial z}(z_0)}.$$

f. Zeigen Sie die komplexe Version des Satzes von Schwarz: Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ zweimal stetig reell differenzierbar, so folgt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z},\ f_{z\overline{z}} = f_{\overline{z}z} = \frac{1}{4}\left(f_{xx} + f_{yy}\right) = \frac{1}{4}\Delta f.$$

g. Zeigen Sie: Sind $f, g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ zweimal komplex differenzierbar auf Ω, so folgt:

$$\frac{\partial^2 (f \cdot \overline{g})}{\partial z \partial \overline{z}} = f' \cdot \overline{g'} \text{ auf } \Omega.$$

h. Bestimmen Sie die Wirtinger-Ableitungen von den Funktionen

$$f(z) = \frac{\overline{z}}{|z|^2},\ g(z) = \frac{2z + \overline{z}}{|z|^2},\ z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Aufgabe 6 ((T))

1. Bestimmen Sie die Punkte an denen die Funktion f komplex differenzierbar ist, sowie deren Ableitung f' darin! Ist f dort auch holomorph?

   (a) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z\,\mathrm{Im}(z)$
   (b) $f\colon \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \dfrac{z}{\overline{z}} - \dfrac{\overline{z}}{z}$
   (c) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z = x + \mathrm{i}y \mapsto y^2 \sin(x) + \mathrm{i}y$
   (d) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z = x + \mathrm{i}y \mapsto \sin^2(x+y) + \mathrm{i}\cos^2(x+y)$
   (e) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto |z|\,.$

2. Setze
$$f\colon \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{z + |z|}{\sqrt{2\,(\mathrm{Re}(z) + |z|)}}.$$
   Zeigen Sie, dass f holomorph auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ ist und bestimmen Sie die Ableitung f' (Hinweis: Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen).

Übungsblätter

Es können keine Aufgaben zur Korrektur abgegeben werden. Es wird aber dringlichst empfohlen die Aufgabe zu bearbeiten. Sollten Sie noch auf Grund ihres Studienganges oder Prüfungsordnung einen Übungsschein benötigen, so wenden Sie sich bitte an Michael Ullmann (michael.ullmann@kit.edu). Zu den mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben werden Lösungsvorschläge in der Übung besprochen und zu denen mit (T) gekennzeichneten im Tutorium. Die Übungsblätter erscheinen immer mittwochs 14tägig, sowie auch die Lösungsvorschläge zu den nicht behandelten Aufgaben, auf der Vorlesungsseite

`http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/ft2016s/`

Tutorium

Es wird nur ein Tutorium geben, dieses findet donnerstags 14tägig im fünften Block (15.45 Uhr bis 17.15 Uhr) im Grashof-Hörsaal (Geb. 10.91, Raum 231) statt. Aufgrund der Feiertage (Christi Himmelfahrt, 05.05., und Fronleichnam, 26.05.) werden die genauen Termine auf der Vorlesungsseite

`http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/ft2016s/`

bekannt gegeben. Das erste Tutorium findet am 28.04.2016 um 15.45 Uhr im Grashof-Hörsaal (Geb. 10.91, Raum 231) statt. Im Tutorium werden Lösungsvorschläge zu den (T) Aufgaben vorgestellt.

Prüfung

Es wird eine schriftliche Prüfung geben. Die Klausur ist am Montag, den 25.07.2016, von 08.30 Uhr bis 10.00 Uhr (90 Minuten) und geschrieben wird im Tulla-Hörsaal (Geb. 11.40).