20.04.2016
Prof. Dr. Tobias Lamm
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Funktionentheorie

1. Übungsblatt - Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 ((Ü) Verschärfung von Lemma von Goursat)

Zeigen Sie die folgende Aussage: Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und es gebe einen Punkt $z_0 \in U$ so, dass f auf $\Omega \backslash \{z_0\}$ holomorph ist. Dann gilt für jedes Dreieck $\Delta \subseteq \Omega$

$$\int_{\partial \Delta} f \mathrm{d}z = 0.$$

Aufgabe 2 ((T) Wiederholung: Kurvenintegrale in $\mathbb{C}$)

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ ein beliebiger Punkt. Berechnen Sie für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle Radien $r > 0$ das Kurvenintegral

$$\int_{\partial B_r(z_0)} (z - z_0)^k \,\mathrm{d}z.$$

Lösung von Aufgabe 2

Der Rand $\partial B_r(z_0)$ ist parametrisiert durch die Kurve $z(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für $t \in [0, 2\pi]$ mit der Ableitung $z'(t) = \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$. So gilt für $k \in \mathbb{Z}$:

$$\int_{\partial B_r(z_0)} (z - z_0)^k \,\mathrm{d}z =) \int_0^{2\pi} \left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)^k \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = r^{k+1} \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)t}\mathrm{d}t.$$

Für $k \neq -1$ ist $t \mapsto \frac{1}{k+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)t}$ eine Stammfunktion von $t \mapsto \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)t}$, also haben wir für $k \neq -1$

$$\int_{\partial B_r(z_0)} (z - z_0)^k \,\mathrm{d}z = r^{k+1} \left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1}\mathrm{e}^{2(k+1)\pi \mathrm{i}}\right] = 0.$$

Ist hingegen $k = -1$, so ist:

$$\int_{\partial B_r(z_0)} (z - z_0)^{-1} \,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}.$$

$\square$

Aufgabe 3 ((T) Anwendungen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen)

Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion, sowie $f = u + \mathrm{i}v$. Zeigen Sie:

a. Seien u, v zweimal stetig differenzierbar und f komplex differenzierbar auf Ω, so sind u und v harmonisch auf Ω, d.h. $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0$.

b. Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und Ω soll gegeben sein durch $\Omega = I + \mathrm{i}J := \{z \in \mathbb{C}|\ \mathrm{Re}(z) \in I,\ \mathrm{Im}(z) \in J\}$, weiter sei $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und harmonisch (d.h. $\Delta u = 0$) auf Ω. Zeigen Sie, dass dann eine holomorphe Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ existiert mit $\mathrm{Re}(f) = u$.

c. Die Äquivalenz: f ist lokal-konstant $\Leftrightarrow$ f ist komplex differenzierbar auf Ω mit $f'(z) = 0$ für $z \in \Omega$.

d. Ist f komplex differenzierbar auf Ω und f nur reell (d.h. $v = 0$) oder nur imaginär (d.h. $u = 0$), dann ist f lokal-konstant.

Dabei nennen wir eine Funktion f lokal-konstant, falls es um jeden Punkt $z_0 \in \Omega$ eine Umgebung $U_0 \subseteq \Omega$ gibt, so, dass die Einschränkung $f|_{U_0}$ konstant ist auf U_0.

Lösung von Aufgabe 3

c. Sei $f = u + \mathrm{i}v$ lokal-konstant und $u_0 \in \Omega$ eine beliebiger Punkt. Dann existiert eine Umgebung $U_0 \subseteq \Omega$ um z_0 so, dass die Einschränkung $f|_{U_0}$ konstant ist auf U_0, dies gilt auch für die Einschränkungen des Real- und Imaginärteils, d.h. $u|_{U_0},\ v|_{U_0}$ sind konstant auf U_0. Damit sind $u|_{U_0},\ v|_{U_0}$ reell differenzierbar auf U_0 mit partiellen Ableitungen $u_x|_{U_0} = u_y|_{U_0} = v_x|_{U_0} = v_y|_{U_0} = 0$. Es gelten offensichtlich die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, so ist f komplex differenzierbar in z_0 mit $f'(z_0) = u_x|_{U_0}(z_0) + \mathrm{i}v_x|_{U_0}(z_0) = 0$. Der Punkt z_0 war beliebig, daher gilt f ist komplex differenzierbar mit $f' = 0$ auf Ω.
Ist andererseits $f = u + \mathrm{i}v$ komplex differenzierbar mit $f' = 0$ auf Ω und $z_0 \in \Omega$ ein beliebiger Punkt, so gilt: $0 = f' = u_x + \mathrm{i}v_x$ auf Ω und nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt $v_y = u_x = 0$ und $u_y = -v_x = 0$ auf Ω. Sei $U_0 \subseteq \Omega$ eine Umgebung um z_0 so, dass u, v reell differenzierbar sind. Dann existieren nach Analysis II Konstanten $c_u, c_v \in \mathbb{R}$ mit $u|_{U_0} = c_u,\ v|_{U_0} = c_v$ auf U_0. Dann ist $f|_{U_0} = c_u + \mathrm{i}c_v$ auf U_0 und somit lokal-konstant.
d. Ist f komplex differenzierbar und $f = u,\ v = 0$ auf Ω, so gilt nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $u_x = v_y = 0$ und $u_y = -v_x = 0$, damit ist $f' = u_x + \mathrm{i}v_x = 0$ und damit nach dem Teil c. lokal-konstant.
Ist f komplex differenzierbar und $f = \mathrm{i}v,\ u = 0$ auf Ω, so gilt nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $v_y = u_x = 0$ und $v_x = -u_y = 0$, damit ist $f' = u_x + \mathrm{i}v_x = 0$ und damit nach dem Teil c. lokal-konstant. □

Aufgabe 4 ((T) Beispiele)

Geben Sie immer mindestens eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an mit folgender Eigenschaft:

a. in überabzählbar vielen Punkten komplex differenzierbar, aber nirgends holomorph.

b. stetig reell differenzierbar, aber nirgends komplex differenzierbar.

c. stetig reell differenzierbar, aber nur in einem Punkt komplex differenzierbar.

Sind Potenzreihen $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ komplex differenzierbar bzw. holomorph? Wenn ja, in welchen Punkten?

Aufgabe 5 ((T) Weiteres zum Wirtinger-Kalkül)

In dieser Aufgabe soll es um den in der Übung eingeführten Wirtinger-Kalkül gehen. Dabei sollen elementare Rechenregel bewiesen werden.

a. Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$, eine Funktion und $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \Omega$ ein Punkt. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a1. f ist reell differenzierbar in $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$.

a2. Es gibt zwei in z_0 stetige Funktionen $\widehat{f_1}, \widehat{f_2}\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\widehat{f_1}(z) + (\overline{z} - \overline{z_0})\widehat{f_2}(z) \text{ für } z \in \Omega.$$

a3. Es gibt zwei in z_0 stetige Funktionen $f_1, f_2\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0) + (x - x_0)f_1(z) + (y - y_0)f_2(z) \text{ für } z = x + \mathrm{i}y \in \Omega.$$

In diesem Fall gilt: $\widehat{f_1}(z_0) = f_z(z_0),\ \widehat{f_2}(z_0) = f_{\overline{z}}(z_0),\ f_1(z_0) = f_x(z_0),\ f_2(z_0) = f_y(z_0)$ und $\det(Df(z_0)) = |f_z(z_0)|^2 - |f_{\overline{z}}(z_0)|^2$, d.h. $Df(z_0) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist invertierbar genau dann, wenn $|f_z(z_0)| \neq |f_{\overline{z}}(z_0)|$ ist.

b. Zeigen Sie: Die Wirtinger-Differentiale $\frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ erfüllen die Summen-, Produkt- und Quotientenregel.

c. Zeigen Sie, dass die Gesetze $\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}},\ \frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}},\ \frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1,\ \frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = 0$ gelten.

d. Zeigen Sie die Äquivalenz: $\overline{f}$ in $z_0 \in \Omega$ komplex differenzierbar $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 0$ und in diesem Fall ist $\overline{f}'(z_0) = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(z_0)$.

e. Zeigen Sie die Kettenregel für $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$: Seien $g\colon \Omega' \to \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $\emptyset \neq \Omega', \Omega \subseteq \mathbb{C}$, reell differenzierbar auf Ω' bzw. Ω mit $g(\Omega') \subseteq \Omega$. Dann ist auch $f \circ g\colon \Omega' \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar und es gilt für alle $z_0 \in \Omega'$:

$$\frac{\partial (f\circ g)}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z_0)) \cdot \frac{\partial g}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g(z_0)) \cdot \overline{\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z_0)},$$
$$\frac{\partial (f\circ g)}{\partial \overline{z}}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z_0)) \cdot \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g(z_0)) \cdot \overline{\frac{\partial g}{\partial z}(z_0)}.$$

f. Zeigen Sie die komplexe Version des Satzes von Schwarz: Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ zweimal stetig reell differenzierbar, so folgt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z},\ f_{z\overline{z}} = f_{\overline{z}z} = \frac{1}{4}\left(f_{xx} + f_{yy}\right) = \frac{1}{4}\Delta f.$$

g. Zeigen Sie: Sind $f, g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ zweimal komplex differenzierbar auf Ω, so folgt:

$$\frac{\partial^2 (f \cdot \overline{g})}{\partial z \partial \overline{z}} = f' \cdot \overline{g'} \text{ auf } \Omega.$$

h. Bestimmen Sie die Wirtinger-Ableitungen von den Funktionen

$$f(z) = \frac{\overline{z}}{|z|^2},\ g(z) = \frac{2z + \overline{z}}{|z|^2},\ z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Lösung von Aufgabe 5

a. Laut der Übung ist $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$, daher gilt

$$\begin{aligned}
|f_z(z_0)| - |f_{\overline{z}}(z_0)| &= \frac{1}{4}\left|(u_x(z_0) + v_y(z_0)) + \mathrm{i}\,(v_x(z_0) - u_y(z_0))\right|^2 - \frac{1}{4}\left|(u_x(z_0) - v_y(z_0)) + \mathrm{i}\,(v_x(z_0) + u_y(z_0))\right|^2 \\
&= \frac{1}{4}\left[(u_x(z_0) + v_y(z_0))^2 + (v_x(z_0) - u_y(z_0))^2 - (u_x(z_0) - v_y(z_0))^2 - (u_y(z_0) + v_x(z_0))^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[u_x^2(z_0) + 2u_x(z_0)v_y(z_0) + v_y^2(z_0) + v_x^2(z_0) - 2v_x(z_0)u_y(z_0) + u_y^2(z_0)\right. \\
&\quad \left. - u_x^2(z_0) + 2u_x(z_0)v_y(z_0) - v_y^2(z_0) - v_x^2(z_0) - 2v_x(z_0)u_y(z_0) - u_y^2(z_0)\right] \\
&= u_x(z_0)v_y(z_0) - u_y(z_0)v_x(z_0) = \det\left(Df(z_0)\right).
\end{aligned}$$

b. Laut Teil a. können wir f und g ausdrücken durch

$$\begin{aligned}
f(z) &= f(z_0) + (z - z_0)f_1(z) + (\overline{z} - \overline{z_0})f_2(z), \\
g(z) &= g(z_0) + (z - z_0)g_1(z) + (\overline{z} - \overline{z_0})g_2(z)
\end{aligned}$$

für $z \in \Omega$ mit $f_1, f_2, g_1, g_2\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig im Punkt $z_0 \in \Omega$. Wir zeigen die einzelnen Regeln:
(Produkt-/Leibnizregel) Wir können $f \cdot g$ schreiben als

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)(z) = f(z_0)g(z_0) &+ (z - z_0)\left[f_1(z)g(z_0) + f(z_0)g_z(z) + (z - z_0)f_1(z)g_1(z) + (\overline{z} - \overline{z_0})f_1(z)g_2(z)\right] \\
&+ (\overline{z} - \overline{z_0})\left[f_2(z)g(z_0) + f(z_0)g_2(z) + (\overline{z} - \overline{z_0})f_2(z)g_2(z) + (z - z_0)f_2(z)g_1(z)\right],\ z \in \Omega.
\end{aligned}$$

Alle Summanden sind stetig in z_0, daher folgt nach Teil a. die reelle Differenzierbarkeit von $f \cdot g$ in z_0 mit $(f \cdot g)_z(z_0) = f_z(z_0)g(z_0) + f(z_0)g_z(z_0)$ und $(f \cdot g)_{\overline{z}}(z_0) = f_{\overline{z}}(z_0)g(z_0) + f(z_0)g_{\overline{z}}(z_0)$.
(Quotientenregel) Auf Grund der Produktregel, können wir $f \equiv 1$ auf Ω annehmen und es gilt für $z \in \Omega$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g(z)} &= \frac{1}{g(z_0)} + (z - z_0)\frac{-g_1(z)}{g(z_0)g(z)} + (\overline{z} - \overline{z_0})\frac{-g_2(z)}{g(z_0)g(z)} \\
\Leftrightarrow\ 1 &= \frac{g(z)}{g(z_0)} - (z - z_0)\frac{g_1(z)}{g(z_0)} - (\overline{z} - \overline{z_0})\frac{g_2(z)}{g(z_0)} \\
&= 1 + (z - z_0)\frac{g_1(z)}{g(z_0)} + (\overline{z} - \overline{z_0})\frac{g_2(z)}{g(z_0)} - (z - z_0)\frac{g_1(z)}{g(z_0)} - (\overline{z} - \overline{z_0})\frac{g_2(z)}{g(z_0)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Die Summanden in der ersten Zeile sind stetig in z_0, daher folgt nach Teil a. die reelle Differenzierbarkeit von $\frac{1}{g}$ in z_0 mit $\left(\frac{1}{g}\right)_z(z_0) = \frac{-g_z(z_0)}{g(z_0)^2}$ und $\left(\frac{1}{g}\right)_{\overline{z}}(z_0) = \frac{-g_{\overline{z}}(z_0)}{g(z_0)^2}$.

c. Nach Teil a. folgt: $\overline{f(z)} = \overline{f(z_0)} + (z - z_0)\overline{f_2(z)} + (\overline{z} - \overline{z_0})\overline{f_1(z)}$ für $z \in \Omega$. Und die Funktionen $\overline{f_1}, \overline{f_2}$ sind in z_0 stetig, daher gilt

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}},\ \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Weiter gilt $z = z_0 + (z - z_0) \cdot 1 + (\overline{z} - \overline{z_0}) \cdot 0,\ \overline{z} = \overline{z_0} + (z - z_0) \cdot 0 + (\overline{z} - \overline{z_0}) \cdot 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Daher ist

$$\frac{\partial z}{\partial z} = 1 = \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}},\ \frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0 = \frac{\partial \overline{z}}{\partial z}.$$

d. Nach der Übung ist g in z_0 komplex differenzierbar genau dann, wenn $\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$ und in diesem Fall ist $g'(z_0) = g_z(z_0)$. Setze $g := \overline{f}$, dann folgt mit Teil c., dass $\overline{f}$ in z_0 komplex differenzierbar ist genau, dann wenn

$$0 = \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z_0) = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(z_0) = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(z_0)$$

$$\Leftrightarrow \ 0 = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0).$$

In diesem Fall ist wieder nach Teil c.: $\overline{f}'(z_0) = \frac{\partial g}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(z_0) = \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}}(z_0)$.

f. Sei $f = u + \mathrm{i}v$. Wegen $\partial z = \frac{1}{2}(\partial_x - \mathrm{i}\partial_y)$ und $\partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + \mathrm{i}\partial_y)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} &= \frac{\partial}{\partial z}(u_{\overline{z}} + \mathrm{i}v_{\overline{z}}) \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{2}(u_x - v_y + \mathrm{i}(v_x + u_y))\right] \\
&= \frac{1}{4}[u_{xx} - v_{xy} + \mathrm{i}(v_{xx} + u_{xy}) - \mathrm{i}(u_{yx} - v_{yy}) + v_{yx} + u_{yy}] \\
&= \frac{1}{4}[u_{xx} + u_{yy} + \mathrm{i}(v_{xx} + v_{yy})] \\
&= \frac{1}{4}\Delta f \\
\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z} &= \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(u_z + \mathrm{i}v_z) \\
&= \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left[\frac{1}{2}(u_x + v_y + \mathrm{i}(v_x - u_y))\right] \\
&= \frac{1}{4}[u_{xx} + v_{xy} + \mathrm{i}(v_{xx} - u_{xy}) + \mathrm{i}(u_{yx} + v_{yy}) - v_{yx} + u_{yy}] \\
&= \frac{1}{4}[u_{xx} + u_{yy} + \mathrm{i}(v_{xx} + v_{yy})] \\
&= \frac{1}{4}\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}},
\end{aligned}$$

laut dem Satz von Schwarz ($u_{xy} = u_{yx}, \ v_{xy} = v_{yx}$).
g. Nach der Produktregel gilt mit Teil c:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(f \cdot \overline{g})}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \overline{g} + f \cdot \frac{\partial \overline{g}}{\partial z} \\
&= f' \cdot \overline{g} + f \cdot \overline{\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}} = f' \cdot \overline{g},
\end{aligned}$$

da g komplex differenzierbar ist auf Ω. Erneutes Anwenden der Produktregel und Teil d. liefert nun:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(f' \cdot \overline{g})}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial f'}{\partial \overline{z}} \cdot \overline{g} + f' \cdot \frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{z}} \\
&= f' \cdot \overline{g'},
\end{aligned}$$

da f' komplex differenzierbar ist auf Ω.
h. Laut der Quotientenregel gilt für $z \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z}(z) &= \frac{0 \cdot |z|^2 - \overline{z} \cdot \overline{z}}{|z|^4} = \frac{-1}{z^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) &= \frac{1 \cdot |z|^2 - \overline{z} \cdot z}{|z|^4} = \frac{|z|^2 - |z|^2}{|z|^4} = 0, \\
\frac{\partial g}{\partial z}(z) &= \frac{2 \cdot |z|^2 - (2z + \overline{z}) \cdot \overline{z}}{|z|^4} = \frac{-\overline{z}^2}{|z|^4} = \frac{-1}{z^2}, \\
\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z) &= \frac{1 \cdot |z|^2 - (2z + \overline{z}) \cdot z}{|z|^4} = \frac{-2z^2}{|z|^4} = \frac{-2}{\overline{z}^2}.
\end{aligned}$$

Also ist f auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ komplex differenzierbar/ holomorph mit $f'(z) = \frac{-1}{z^2}$, aber g nirgends auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ komplex differenzierbar. $\square$

Aufgabe 6 ((T))

1. Bestimmen Sie die Punkte an denen die Funktion f komplex differenzierbar ist, sowie deren Ableitung f' darin! Ist f dort auch holomorph?

   (a) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z\,\mathrm{Im}(z)$ *(b)* $f\colon \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{z}{\overline{z}} - \frac{\overline{z}}{z}$

(*c*) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z = x + \mathrm{i}y \mapsto y^2 \sin(x) + \mathrm{i}y$

(*d*) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z = x + \mathrm{i}y \mapsto \sin^2(x + y) + \mathrm{i}\cos^2(x + y)$

(*e*) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto |z|$.

2. Setze
$$f\colon \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{z + |z|}{\sqrt{2\,(\mathrm{Re}(z) + |z|)}}.$$
Zeigen Sie, dass f holomorph auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ ist und bestimmen Sie die Ableitung f' (Hinweis: Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen).

Lösung von Aufgabe 6

1. (*c*) Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z = x + \mathrm{i}y \mapsto y^2 \sin(x) + \mathrm{i}y$. Setze $u(z) := u(x + \mathrm{i}y) := y^2 \sin(x)$ und $v(z) := v(x + \mathrm{i}y) = y$ für $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$. So sind die Funktionen $u, v\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ überall stetig differenzierbar mit
$$u_x(z) = u_x(x + \mathrm{i}y) = y^2 \cos(x),\ u_y(z) = u_y(x + \mathrm{i}y) = 2y \sin(x),\ v_x(z) = v_x(x + \mathrm{i}y) = 0,\ v_y(z) = v_y(x + \mathrm{i}y) = 1$$
für alle $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ gelten genau dann in $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, wenn $y^2 \cos(x) = 1$ und $y \sin(x) = 0$ sind. Die erste Gleichung schließt $y = 0$ aus, d.h. wegen der zweiten Gleichung muss $\sin(x) = 0$, also $x \in \{k\pi|\ k \in \mathbb{Z}\}$ sein. Es gilt aber $\cos(k\pi) = \pm 1$, $k \in \mathbb{Z}$, allerdings muss $\cos(x) = \frac{1}{y^2} > 0$ sein, also muss $x \in \{2k\pi|\ k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{k\pi|\ k \in \mathbb{Z}\}$ sein und $\cos(2k\pi) = 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, also $\cos(x) = 1$. Demnach muss $y^2 = 1$, also $y = \pm 1$ sein. Zusammengefasst sind die Cauchy-Riemmanschen Differentialgleichungen genau dann erfüllt, wenn $z \in \{w \in \mathbb{C}|\ \mathrm{Re}(w) = 2k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z},\ \mathrm{Im}(w) \in \{-1, 1\}\} =: A$. Also ist f in der Menge A komplex differenzierbar mit der Ableitung $f'(z) = u_x(z) + \mathrm{i}v_x(z) = y^2 \cos(x)$, $z \in A$. Die Menge A kann aber nicht offen sein bzw. deren Inneres A° ist leer, da die Menge diskret ist, demnach ist f nirgends holomorph.

(*d*) Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z = x + \mathrm{i}y \mapsto \sin^2(x + y) + \mathrm{i}\cos^2(x + y)$. Setze $u(z) := u(x + \mathrm{i}y) := \sin^2(x + y)$ und $v(z) := v(x + \mathrm{i}y) = \cos^2(x + y)$ für $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$. So sind die Funktionen $u, v\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ überall stetig differenzierbar mit
$$\begin{aligned} u_x(z) &= u_x(x + \mathrm{i}y) 2\sin(x + y)\cos(x + y),\ u_y(z) = u_y(x + \mathrm{i}y) = 2\sin(x + y)\cos(x + y), \\ v_x(z) &= v_x(x + \mathrm{i}y) = -2\sin(x + y)\cos(x + y),\ v_y(z) = v_y(x + \mathrm{i}y) = -2\sin(x + y)\cos(x + y) \end{aligned}$$
für alle $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$. Von den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ ist offensichtlich sofort $u_y = -v_x$ auf ganz $\mathbb{C}$ erfüllt. Die andere Gleichung gilt genau dann, wenn $\sin(x+y)\cos(x+y) = 0$, also nur, wenn $\sin(x + y) = 0$ oder $\cos(x + y) = 0$ ist, das bedeutet dann, dass
$$x + y \in \{k\pi|\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{2k + 1}{2}\pi|\ k \in \mathbb{Z}\right\} =: B \text{ ist.}$$
Also ist f nur auf der Menge B komplex differenzierbar mit Ableitung $f'(z) = u_x(z) + \mathrm{i}v_x(z) = 2\sin(x + y)\cos(x + y) - 2\mathrm{i}\sin(x + y)\cos(x + y)$ für $z = x + \mathrm{i}y \in B$. Die Menge B ist eine diskrete Menge, also ist f nirgends holomorph.

(*e*) Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z = x + \mathrm{i}y \mapsto |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. So definiere für $z = x + \mathrm{i}y$ den Real- und Imaginärteil durch
$$u(z) := u(x + \mathrm{i}y) := \sqrt{x^2 + y^2},\ v(z) := v(x + \mathrm{i}y) := 0.$$
Dann sind die Funktionen $u, v\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{C}$ und stetig differenzierbar auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ und für die Ableitungen gilt in $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$:
$$u_x(z) = u_x(x + \mathrm{i}y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ u_y(z) = u_y(x + \mathrm{i}y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ v_x(z) = v_x(x + \mathrm{i}y) = 0,\ v_y(z) = v_y(x + \mathrm{i}y) = 0.$$
Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ können nur bei $x = 0 = y$ gelten, also $z = 0$, aber darin sind u und v nicht differenzierbar, also ist f in keinem Punkt auf $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar und somit auch nirgends holomorph.

2. Setze $r(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, dann gilt
$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = \frac{x + \mathrm{i}y + r(x, y)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{x + r(x, y)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x + r(x, y)} + \mathrm{i}\frac{y}{\sqrt{x + r(x, y)}}\right),\ z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0].$$
Also ist $f = u + \mathrm{i}v$ mit
$$u(z) = u(x + \mathrm{i}y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x + r(x, y)},$$

$$v(z) = v(x+\mathrm{i}y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x+r(x,y)}} \text{ mit } z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}\backslash(-\infty,0].$$

Die Funktion r ist auf $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ differenzierbar mit $r_x(x,y) = \frac{x}{r(x,y)}$ und $r_y(x,y) = \frac{y}{r(x,y)}$. Daher ist f als Verkettung reell differenzierbarer Funktionen selber reell differenzierbar und es gilt für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
u_x(z) = u_x(x+\mathrm{i}y) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1+\frac{x}{r(x,y)}}{\sqrt{x+r(x,y)}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{x+r(x,y)}}{r(x,y)}, \\
u_y(z) = u_y(x+\mathrm{i}y) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\frac{y}{r(x,y)}}{\sqrt{x+r(x,y)}} = \frac{y}{2\sqrt{2}r(x,y)\sqrt{x+r(x,y)}}, \\
v_x(z) = v_x(x+\mathrm{i}y) &= \frac{-y}{2\sqrt{2}} \frac{1+\frac{x}{r(x,y)}}{\sqrt{x+r(x,y)}^3} = -\frac{y}{2\sqrt{2}r(x,y)\sqrt{x+r(x,y)}}, \\
v_y(z) = v_y(x+\mathrm{i}y) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x+r(x,y)} - \frac{y}{2} \cdot \frac{\frac{y}{r(x,y)}}{\sqrt{x+r(x,y)}}}{x+r(x,y)}
\end{aligned}$$

für alle $z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$. Wir können direkt $u_y = -v_x$ auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ ablesen. Setze nun $\alpha := r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt für alle $z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}v_y(z) = \sqrt{2}v_y(x+\mathrm{i}y) &= \frac{\sqrt{x+\alpha} - \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{\alpha\sqrt{x+\alpha}}}{x+\alpha} \\
&= \frac{\sqrt{x+\alpha}}{2\alpha} \cdot \frac{2\alpha(x+\alpha) - y^2}{(x+\alpha)^2} \\
&= \frac{\sqrt{x+\alpha}}{2\alpha} \cdot \frac{2\alpha x + 2\alpha^2 - y^2}{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2} \\
&= \frac{\sqrt{x+\alpha}}{2\alpha} \cdot \frac{2\alpha x + 2(x^2+y^2) - y^2}{2\alpha x + x^2 + (x^2+y^2)} \\
&= \sqrt{2}u_x(x+\mathrm{i}y) = \sqrt{2}u_x(z).
\end{aligned}$$

Damit sind die Cauchy-Riemmanschen Differentialgleichungen erfüllt für f auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$, d.h. nach der Vorlesung ist f komplex differenzierbar und sogar holomorph mit der Ableitung

$$\begin{aligned}
f'(z) &= u_x(z) + \mathrm{i}v_x(z) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\mathrm{Re}(z)+|z|}}{|z|} - \mathrm{i}\frac{\mathrm{Im}(z)}{2\sqrt{2}|z|\sqrt{\mathrm{Re}(z)+|z|}} \\
&= \frac{\overline{z}+|z|}{2\sqrt{2}|z|\sqrt{\mathrm{Re}(z)+|z|}}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty,0].
\end{aligned}$$

□