04.05.2016
Prof. Dr. Tobias Lamm
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Funktionentheorie

2. Übungsblatt

Aufgabe 1 ((T) Der Hauptzweig des Logarithmus)

1. Leiten Sie auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C}^-$ eine Potenzreihendarstellung zu jedem Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}^-$ vom komplexen Logarithmus her, speziell von $z_0 = 1$, und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

2. Rechnen Sie explizit mit der Potenzreihendarstellung von 1. nach, dass
$$\exp\left(\mathrm{Log}(z+1)\right) = 1 + z \text{ für alle } z \in \{w \in \mathbb{C} : \ |w| < 1\} =: B_1(0)$$
gilt.

3. Sei $c \in [0,1)$. Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-1| \leq c$ die Abschätzung
$$|\mathrm{Log}(z)| \leq \frac{c}{1-c}$$
gilt. Wann gilt Gleichheit?

4. Zeigen Sie, dass der Hauptzweig der allgemeinen Exponentialfunktion $z \mapsto a^z$ (mit $a \in \mathbb{C}^-$) die Ableitung $z \mapsto \mathrm{Log}(a) \cdot a^z$ hat.

5. Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von folgenden komplexen Zahlen:
$$(a)\ z = (1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}},\ (b)\ z = \mathrm{i}^{\frac{1}{\mathrm{i}}},\ (c)\ z = (\mathrm{Log}(\mathrm{i}))^{\mathrm{i}},\ (d)\ \mathrm{i}^{(\mathrm{i}^{\mathrm{i}})},\ (e)\ z = \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 2 ((Ü) Fouriertransformation)

Zu einer Zahl $a > 0$ führen wir den Funktionenraum $\mathcal{F}_a$ ein durch: Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gehört zur Klasse $\mathcal{F}_a$, falls folgende zwei Bedinungen an die Funktion f gelten:

1. Die Funktion f ist holomorph auf dem horizontalen Streifen
$$S_a := \{z \in \mathbb{C} : \ |\mathrm{Im}(z)| < a\}.$$

2. Die Funktion f ist auf S_a von moderatem Abfall, d.h. es existiert eine Konstante $A > 0$ mit
$$|f(x + \mathrm{i}y)| \leq \frac{A}{1+x^2} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } |y| < a.$$

Weiter sagen wir, dass eine Funktion f zur Klasse $\mathcal{F}$ gehört, falls es ein $a_f > 0$ gibt so, dass $f \in \mathcal{F}_{a_f}$ ist. Definiere die Fouriertransformierte von einer Funktion $f \in \mathcal{F}$ im Punkt $\xi \in \mathbb{R}$ durch:
$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \cdot \xi} f(x)\mathrm{d}x.$$

1. Zeigen Sie, dass falls die Funktion $f \in \mathcal{F}_a$ für ein $a > 0$ ist, so existiert eine Konstante $B_f > 0$ mit

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leq B_f \mathrm{e}^{-2\pi b|\xi|}$$

für alle $b \in [0, a)$ und alle $\xi \in \mathbb{R}$.

2. Zeigen Sie: Sind $A > 0$ und $B \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(A+\mathrm{i}B)\cdot\xi} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{A + \mathrm{i}B}.$$

3. Zeigen Sie mit Hilfe von 2., dass die Fourierinversionsformel für $f \in \mathcal{F}$ gilt, d.h. für $f \in \mathcal{F}$ ist:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}x\cdot\xi} \widehat{f}(\xi) \mathrm{d}\xi \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(Hinweis: Nutzen Sie ihr Wissen vom Beweis von 1.)

Aufgabe 3 ((T) Zwei erste Maximumsprinzipien)

1. Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf Ω. Zeigen Sie, dass $|f|$ nicht sein Maximum in Ω annimmt außer, wenn $|f|$ konstant ist.

2. Sei $\Omega_1 \subseteq \mathbb{C}$ nun ein vertikaler Streifen, d.h. es existieren Werte $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 < x_1$ so, dass $z = x + \mathrm{i}y \in \Omega_1$ ist genau dann, wenn $x \in [x_0, x_1]$ ist. Weiter sei $S > 0$ und $f\colon \Omega_1 \to \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare und gleichmäßig beschränkte Funktion auf dem Streifen Ω_1. Angenommen wir wissen, dass

$$|f(x_0 + \mathrm{i}y)| \leq S \text{ und } |f(x_1 + \mathrm{i}y)| \leq S \text{ für alle } y \in \mathbb{R} \text{ gilt.}$$

Zeigen Sie, dass dann $|f(x + \mathrm{i}y)| \leq S$ ist für alle $x \in [x_0, x_1]$ und allen $y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 ((Ü) Eine L^∞-L^2 Abschätzung für holomorphe Funktionen)

Sei $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge. Für eine stetige Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ definiere die L^2-Norm auf U als

$$\|f\|_{L^2(U)} := \left(\int_U |f(z)|^2 \,\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{2}}$$

und die L^∞-Norm auf U durch

$$\|f\|_{L^\infty(U)} := \sup_{z \in U} |f(z)|\,.$$

1. Sei $R > 0$ ein Radius und $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Punkt, sowie $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{B_R(z_0)} \subseteq \Omega$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf Ω. Zeigen Sie, dass für jedes $r \in (0, R)$ eine Konstante $C_{r,R} := C(r, R) \geq 0$ gibt so, dass die folgende Abschätzung

$$\|f\|_{L^\infty(B_r(z_0))} \leq C_{r,R} \|f\|_{L^2(B_R(z_0))}$$

gilt.
(Hinweis: Nutzen Sie die Integralformel von Cauchy/ die Mittelwerteigenschaft, sowie die Hölder-Ungleichung aus Analysis I)

2. Zeigen Sie, den Weierstraßschen Konvergenzsatz: Sei $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f_n\colon U \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von holomorphen Funktion auf U die in jeder kompakten Teilmenge von U gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist die Funktion f holomorph auf U und für die k-ten Ableitungen gilt, dass die Folge der Ableitungen $\left(f_n^{(k)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ in jeder kompakten Teilmenge von U gleichmäßig gegen die Ableitung $f^{(k)}$ konvergieren.

3. Sei nun $\emptyset \neq \Omega_0 \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f_n\colon \Omega_0 \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge bzgl. der $\|\cdot\|_{L^2(\Omega_0)}$ auf Ω_0, zusätzlich seien die f_n's, $n \in \mathbb{N}$, holomorph auf Ω_0. Folgern Sie aus dem Weierstraßschen Konvergenzsatz, dass für alle kompakten Mengen $K \subseteq \Omega_0$ die Folge $(f_n|_K)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf K gegen eine holomorphe Funktion $f\colon \Omega_0 \to \mathbb{C}$ konvergiert.

Aufgabe 5 ((T) Cauchy Integralformel für Rechtecke)

Seien $x_0, y_0 < 0$ und $x_1, y_1 > 0$ Zahlen. Dann ist ein Rechteck $\Box$ gegeben durch die vier Ecken $x_0 + iy_1, x_1 + iy_1, x_1 + iy_0, x_0 + iy_0$.

1. Berechnen Sie das Kurvenintegral
$$\int_{\partial\Box} \frac{1}{z} \mathrm{d}z,$$
wobei der Rand $\partial\Box$ des Rechtecks $\Box$ gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

2. Folgern Sie daraus und mit dem Lemma von Goursat für Rechtecke (siehe auch Vorlesungsseite/ Übung) das die Cauchy Integralformel auch für Rechtecksränder gilt: Ist $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf Ω, sowie ein Rechteck (mit Rand) $\Box \subseteq \Omega$ gegeben. Dann gilt für jeden Punkt $z_0 \in \Box^\circ$ im Inneren von $\Box$:
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Box} \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z,$$
wobei der Rand $\partial\Box$ des Rechtecks $\Box$ gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

Aufgabe 6 ((T) Einige bekannte reelle Integrale)

Zeigen Sie die folgenden Integrale:

a. (Fixpunkt der Fouriertransformation) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{2\pi i x \cdot \xi} \mathrm{e}^{-\pi x^2} \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\pi \xi^2}$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$.
(Hinweis: Nutzen Sie aus, dass sie $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2} \mathrm{d}x = 1$ schon aus Analysis I/II kennen)

b. $\int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

c. $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 7 ((T) Weitere Kurvenintegrale)

Bestimmen Sie die folgenden Kurvenintegrale, dabei seien $a, b \in \mathbb{C}$, $r > 0$ mit $|a| < r < |b|$ und Kurve $\gamma_r \colon [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto r \cdot \mathrm{e}^{it}$ gegeben.

(a) $\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{1}{z-a} \mathrm{d}z,$ (b) $\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{1}{z-b} \mathrm{d}z,$ (c) $\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{1}{(z-a)\cdot(z-b)} \mathrm{d}z,$ (d) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+3z} \mathrm{d}z,$

(e) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1} \mathrm{d}z,$ (f) $\displaystyle\int_{|z+3|=3} \frac{z^3}{z^2+1} \mathrm{d}z,$ (g) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z+1)^4} \mathrm{d}z,$ (h) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{z\mathrm{e}^{iz}}{(z-\pi)^3} \mathrm{d}z,$

(i) $\displaystyle\int_{|z-2|=3} \frac{\mathrm{e}^{i\cos(z)} \cdot \sin\left(z^4+1\right) - z}{(z-7)^{42}} \mathrm{d}z.$

Tutorium

Es wird nun zwei Tutorien geben, diese finden donnerstags 14tägig im fünften und sechsten Block (15.45 Uhr bis 17.15 Uhr und 17.30 Uhr bis 19.00 Uhr) im Grashof-Hörsaal (Geb. 10.91, Raum 231) bzw. im Seminarraum SR 2.067 (Geb.20.30) statt. Aufgrund der Feiertage (Christi Himmelfahrt, 05.05., und Fronleichnam, 26.05.) werden die genauen Termine, Orte und Zeiten auf der Vorlesungsseite

`http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/ft2016s/`

bekannt gegeben. Im Tutorium werden Lösungsvorschläge zu den (T) Aufgaben vorgestellt.