04.05.2016
Prof. Dr. Tobias Lamm
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Funktionentheorie

2. Übungsblatt - Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 ((T) Der Hauptzweig des Logarithmus)

1. Leiten Sie auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C}^-$ eine Potenzreihendarstellung zu jedem Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}^-$ vom komplexen Logarithmus her, speziell von $z_0 = 1$, und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

2. Rechnen Sie explizit mit der Potenzreihendarstellung von 1. nach, dass
$$\exp\left(\mathrm{Log}(z+1)\right) = 1 + z \text{ für alle } z \in \{w \in \mathbb{C} : \ |w| < 1\} =: B_1(0)$$
gilt.

3. Sei $c \in [0,1)$. Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-1| \leq c$ die Abschätzung
$$|\mathrm{Log}(z)| \leq \frac{c}{1-c}$$
gilt. Wann gilt Gleichheit?

4. Zeigen Sie, dass der Hauptzweig der allgemeinen Exponentialfunktion $z \mapsto a^z$ (mit $a \in \mathbb{C}^-$) die Ableitung $z \mapsto \mathrm{Log}(a) \cdot a^z$ hat.

5. Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von folgenden komplexen Zahlen:
$$(a)\ z = (1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}},\ (b)\ z = \mathrm{i}^{\frac{1}{\mathrm{i}}},\ (c)\ z = (\mathrm{Log}(\mathrm{i}))^{\mathrm{i}},\ (d)\ \mathrm{i}^{(\mathrm{i}^{\mathrm{i}})},\ (e)\ z = \left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Lösung von Aufgabe 1

2. Definiere für $z \in B_1(0)$ die Funktion g mit 1. durch:
$$g(z) := (1+z)^{-1} \exp\left(\mathrm{Log}(z+1)\right) = (1+z)^{-1} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k\right).$$
Da nach geometrischer Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-z)^k = \frac{1}{1+z} \text{ für } z \in B_1(0) \text{ gilt,}$$
folgt für die Ableitung von g in $z \in B_1(0)$:
$$g'(z) = \frac{\frac{1}{1+z} \cdot (1+z) \cdot \exp\left(\mathrm{Log}(z+1)\right) - 1 \cdot \exp\left(\mathrm{Log}(z+1)\right)}{(1+z)^2} = 0.$$
Also ist g konstant und aus $g(0) = \exp(0) = 1$ folgt, dass
$$1 = g(z) \ \Leftrightarrow \ \exp\left(\mathrm{Log}(z+1)\right) = 1 + z$$
für alle $z \in B_1(0)$ ist.
4. Nach Definition gilt:
$$f(z) = a^z = \exp\left(z \cdot \mathrm{Log}(a)\right) \text{ für } z \in \mathbb{C}.$$

So sehen wir ein, dass die Funktion f holomorph ist auf ganz $\mathbb{C}$. Nach der Kettenregel folgt schon für $z \in \mathbb{C}$:

$$f'(z) = \operatorname{Log}(a) \cdot \exp(z \cdot \operatorname{Log}(a)) = \operatorname{Log}(a) \cdot a^z = \operatorname{Log}(a) \cdot f(z).$$

5. (c) Aus (b) wissen wir, dass $\operatorname{Log}(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\frac{\pi}{2}$ ist. Demnach ist laut Vorlesung

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(\operatorname{Log}(\mathrm{i})) &= \operatorname{Log}\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right) = \log\left(\left|\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right|\right) + \mathrm{i}\operatorname{Arg}\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \log\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\arctan(\infty) = \log\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}(\operatorname{Log}(\mathrm{i}))^{\mathrm{i}} &= \exp(\mathrm{i} \cdot \operatorname{Log}(\operatorname{Log}(\mathrm{i}))) = \exp\left(\mathrm{i} \cdot \left(\log\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right)\right) = \exp\left(\mathrm{i}\log\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\cos\left(\log\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + \mathrm{i}\sin\left(\log\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Das heißt:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left((\operatorname{Log}(\mathrm{i}))^{\mathrm{i}}\right) &= \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\log\left(\frac{\pi}{2}\right)\right), \\ \operatorname{Im}\left((\operatorname{Log}(\mathrm{i}))^{\mathrm{i}}\right) &= \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\log\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 2 ((Ü) Fouriertransformation)

Zu einer Zahl $a > 0$ führen wir den Funktionenraum $\mathcal{F}_a$ ein durch: Eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gehört zur Klasse $\mathcal{F}_a$, falls folgende zwei Bedinungen an die Funktion f gelten:

1. Die Funktion f ist holomorph auf dem horizontalen Streifen

$$S_a := \{z \in \mathbb{C} : \ |\operatorname{Im}(z)| < a\}.$$

2. Die Funktion f ist auf S_a von moderatem Abfall, d.h. es existiert eine Konstante $A > 0$ mit

$$|f(x + \mathrm{i}y)| \leq \frac{A}{1 + x^2} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } |y| < a.$$

Weiter sagen wir, dass eine Funktion f zur Klasse $\mathcal{F}$ gehört, falls es ein $a_f > 0$ gibt so, dass $f \in \mathcal{F}_{a_f}$ ist. Definiere die Fouriertransformierte von einer Funktion $f \in \mathcal{F}$ im Punkt $\xi \in \mathbb{R}$ durch:

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x.$$

1. Zeigen Sie, dass falls die Funktion $f \in \mathcal{F}_a$ für ein $a > 0$ ist, so existiert eine Konstante $B_f > 0$ mit

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leq B_f \mathrm{e}^{-2\pi b|\xi|}$$

für alle $b \in [0, a)$ und alle $\xi \in \mathbb{R}$.

2. Zeigen Sie: Sind $A > 0$ und $B \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(A+\mathrm{i}B)\cdot\xi}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{A + \mathrm{i}B}.$$

3. Zeigen Sie mit Hilfe von 2., dass die Fourierinversionsformel für $f \in \mathcal{F}$ gilt, d.h. für $f \in \mathcal{F}$ ist:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi} \widehat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(Hinweis: Nutzen Sie ihr Wissen vom Beweis von 1.)

Aufgabe 3 ((T) Zwei erste Maximumsprinzipien)

1. Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf Ω. Zeigen Sie, dass $|f|$ nicht sein Maximum in Ω annimmt außer, wenn $|f|$ konstant ist.

2. Sei $\Omega_1 \subseteq \mathbb{C}$ nun ein vertikaler Streifen, d.h. es existieren Werte $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 < x_1$ so, dass $z = x + \mathrm{i}y \in \Omega_1$ ist genau dann, wenn $x \in [x_0, x_1]$ ist. Weiter sei $S > 0$ und $f\colon \Omega_1 \to \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare und gleichmäßig beschränkte Funktion auf dem Streifen Ω_1. Angenommen wir wissen, dass
$$|f(x_0 + \mathrm{i}y)| \leq S \text{ und } |f(x_1 + \mathrm{i}y)| \leq S \text{ für alle } y \in \mathbb{R} \text{ gilt.}$$
Zeigen Sie, dass dann $|f(x + \mathrm{i}y)| \leq S$ ist für alle $x \in [x_0, x_1]$ und allen $y \in \mathbb{R}$.

Lösung von Aufgabe 3

2. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $x_0 \geq 1$ ist. So ist für alle $\varepsilon > 0$ die Funktion $g_\varepsilon\colon \Omega \to \mathbb{C}, z \mapsto z^{-\varepsilon} f(z)$ komplex differenzierbar auf Ω. So ist $|g_\varepsilon|$ gleichmäßig beschränkt und $|g_\varepsilon(z)| \to 0$ für $x \in [x_0, x_1]$ und $y \to \pm\infty$. Nach Analysis I nimmt die Funktion $|g_\varepsilon|$ das Maximum in einem Punkt $z_0 \in \Omega$ an. Laut dem ersten Teil der Aufgabe muss/ kann z_0 auf dem Rand liegen, d.h. $\operatorname{Re}(z_0) = x_0$ oder $\operatorname{Re}(z_0) = x_1$. Also $|g_\varepsilon(z)| \leq |g_\varepsilon(z_0)|$ für alle $z \in \Omega$. Dann folgt für $z \in \Omega$:
$$\begin{aligned} |f(z)| &= |z|^\varepsilon \cdot |g_\varepsilon(z)| \leq |z|^\varepsilon \cdot |g_\varepsilon(z_0)| \\ &= |z|^\varepsilon \cdot \left|z_0^{-\varepsilon} f(z_0)\right| \to |f(z_0)| \leq S \text{ für } \varepsilon \to 0^+. \\ \Rightarrow\ |f(z)| &\leq S. \end{aligned}$$
□

Aufgabe 4 ((Ü) Eine L^∞-L^2 Abschätzung für holomorphe Funktionen)

Sei $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge. Für eine stetige Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ definiere die L^2-Norm auf U als
$$\|f\|_{L^2(U)} := \left(\int_U |f(z)|^2 \,\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{2}}$$
und die L^∞-Norm auf U durch
$$\|f\|_{L^\infty(U)} := \sup_{z \in U} |f(z)|.$$

1. Sei $R > 0$ ein Radius und $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Punkt, sowie $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{B_R(z_0)} \subseteq \Omega$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf Ω. Zeigen Sie, dass für jedes $r \in (0, R)$ eine Konstante $C_{r,R} := C(r, R) \geq 0$ gibt so, dass die folgende Abschätzung
$$\|f\|_{L^\infty(B_r(z_0))} \leq C_{r,R} \|f\|_{L^2(B_R(z_0))}$$
gilt.
(Hinweis: Nutzen Sie die Integralformel von Cauchy/ die Mittelwerteigenschaft, sowie die Hölder-Ungleichung aus Analysis I)

2. Zeigen Sie, den Weierstraßschen Konvergenzsatz: Sei $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f_n\colon U \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von holomorphen Funktion auf U die in jeder kompakten Teilmenge von U gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist die Funktion f holomorph auf U und für die k-ten Ableitungen gilt, dass die Folge der Ableitungen $\left(f_n^{(k)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ in jeder kompakten Teilmenge von U gleichmäßig gegen die Ableitung $f^{(k)}$ konvergieren.

3. Sei nun $\emptyset \neq \Omega_0 \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f_n\colon \Omega_0 \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge bzgl. der $\|\cdot\|_{L^2(\Omega_0)}$ auf Ω_0, zusätzlich seien die f_n's, $n \in \mathbb{N}$, holomorph auf Ω_0. Folgern Sie aus dem Weierstraßschen Konvergenzsatz, dass für alle kompakten Mengen $K \subseteq \Omega_0$ die Folge $(f_n|_K)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf K gegen eine holomorphe Funktion $f\colon \Omega_0 \to \mathbb{C}$ konvergiert.

Lösung von Aufgabe 4

1. Ist die Funktion konstant null auf $B_r(z_0)$, so ist die Aussage trivial. Nehmen wir also o.B.d.A. an, dass f nicht

konstant null ist auf $B_r(z_0)$. Da die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{B_r(z_0)} \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und die Funktion f insbesondere darauf stetig ist, existiert eine Stelle $z_1 \in \overline{B_r(z_0)}$ so, dass

$$|f(z_1)| = \sup_{z \in B_r(z_0)} |f(z)| = \|f\|_{L^\infty(B_r(z_0))} \text{ ist.}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (siehe Analysis I) existiert eine Zahl $\varphi_{R,r} \in \left[0, \frac{R-r}{2}\right]$ mit

$$\int_0^{\frac{R-r}{2}} \sqrt{\varepsilon} \int_0^{2\pi} \left|f(z_1 + \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right| \mathrm{d}t \mathrm{d}\varepsilon = \sqrt{\varphi_{R,r}} \int_0^{2\pi} \left|f\left(z_1 + \varphi_{R,r} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\right| \mathrm{d}t \cdot \frac{R-r}{2}.$$

Weil wir f als nicht konstant null angenommen haben, wissen wir, dass $\varphi_{R,r} \neq 0$ sein muss. Also folgt nun nach der Mittelwerteigenschaft/ Cauchy-Integralformel, Dreiecks-Ungleichung und der Hölder-Ungleichung (zweimal):

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^\infty(B_r(z_0))} = |f(z_1)| &= \left|\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_1 + \varphi_{R,r} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) \mathrm{d}t\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(z_1 + \varphi_{R,r} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\right| \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi\sqrt{\varphi_{R,r}}} \sqrt{\varphi_{R,r}} \int_0^{2\pi} \left|f\left(z_1 + \varphi_{R,r} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\right| \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\varphi_{R,r}}} \left(\int_0^{\frac{R-r}{2}} \sqrt{\varepsilon} \int_0^{2\pi} \left|f(z_1 + \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right| \mathrm{d}t \mathrm{d}\varepsilon\right) \cdot \frac{2}{R-r} \\
&\leq \frac{1}{\pi(R-r)\sqrt{\varphi_{R,r}}} \int_0^{\frac{R-r}{2}} \sqrt{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \varepsilon \left|f(z_1 + \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\varepsilon \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{(R-r)\sqrt{\pi\varphi_{R,r}}} \left(\int_0^{\frac{R-r}{2}} \int_0^{2\pi} \varepsilon \left|f(z_1 + \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right|^2 \mathrm{d}t \mathrm{d}\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{R-r}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\pi(R-r)\varphi_{R,r}}} \left(\int_0^{R} \int_0^{2\pi} \varepsilon \left|f(z_0 + \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right|^2 \mathrm{d}t \mathrm{d}\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi(R-r)\varphi_{R,r}}} \|f\|_{L^2(B_R(z_0))} = C_{R,r} \|f\|_{L^2(B_r(z_0))}
\end{aligned}$$

mit $C_{R,r} := \frac{1}{\sqrt{\pi(R-r)\varphi_{R,r}}} > 0$. Dies war zu zeigen.

2. Laut dem Vertauschungssatz bei gleichmäßiger Konvergenz (siehe Übungsmaterial auf der Vorlesungsseite) gilt für jedes Dreieck $\Delta \subseteq U$, da Δ kompakt ist,

$$\int_{\partial\Delta} f \mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n \mathrm{d}z.$$

Aus dem Lemma von Goursat wissen wir, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\partial\Delta} f_n \mathrm{d}z = 0 \text{ für alle Dreiecke } \Delta \subseteq U \text{ ist.}$$

Demnach gilt für alle Dreieck $\Delta \subseteq U$:

$$\int_{\partial\Delta} f \mathrm{d}z = 0.$$

Somit ist die Funktion $f$nach dem Satz von Morera holomorph. Es genügt den Fall $k = 1$ zu betrachten, der Rest folgt induktiv. Sei die Menge $K \subseteq U$ eine kompakte Menge, so setze $r := \min\left\{1, \frac{1}{2}\operatorname{dist}(K, \partial U)\right\} > 0$, da K kompakt und U offen ist. So ist $\overline{B_r(z)} \subseteq U$ für alle $z \in K$ und weiter ist $\bigcup_{z\in K} B_r(z) \subseteq U$ eine offene Überdeckung von K, d.h.

$$K \subseteq \bigcup_{z\in K} B_r(z).$$

Nun existiert, da K kompakt ist, eine endliche Teilüberdeckung. In diesem Fall finden wir $z_1, \ldots, z_N \in K$, $N \in \mathbb{N}$, mit

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_r(z_i).$$

Nun können wir dies mit den Cauchy-Abschätzformeln schreiben als:

$$\sup_{z\in K} \left|\left(f_n' - f'\right)(z)\right| \leq 1! \sup_{z\in K} r^{-1} \sup_{z' \in \partial B_r(z)} \left|\left(f_n - f\right)(z')\right|$$

$$\leq r^{-1} \cdot \sup_{z \in \bigcup_{i=1}^{N} \overline{B_r(z_i)}} |(f_n - f)(z)| \to 0, \ n \to \infty,$$

da die Menge $\bigcup_{i=1}^{N} \overline{B_r(z_i)}$ kompakt ist als endliche Vereinigung von kompakten Mengen.
3. Sei $K \subseteq \Omega_0$ eine kompakte Menge. Dann ist $\operatorname{dist}(K, \partial\Omega_0) > 0$, da K kompakt und Ω_0 offen ist. Setze also wie in 2. $r := \min\left\{1, \frac{1}{2}\operatorname{dist}(K, \partial U)\right\} > 0$, so gilt $\overline{B_r(z)} \subseteq U$ für alle $z \in K$. Dann ist $K \subseteq \bigcup_{z \in K} B_r(z) \subseteq U$, und da K kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung, d.h. es gibt Punkte $z_i, \ i = 1, \ldots, N$ so, dass

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_r(z_i)$$

ist. Wähle nun $R > r > 0$ so, dass $\overline{B_R(z_i)} \subseteq \Omega_0$ ist, dies geht auf Grund der Wahl vom Radius r. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq n_0$

$$\|f_n - f\|_{L^2(\Omega_0)} < \frac{\varepsilon}{N \cdot C_{R,r}}$$

gilt, weil $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_{L^2(\Omega_0)}$ ist, wobei $C_{R,r} > 0$ die Konstante aus 1. ist. Dann gilt für $n \geq n_0$ mit der L^∞-L^2-Abschätzung aus 1.:

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in K} |(f_n - f)(z)| &\leq \sup_{z \in \bigcup_{i=1}^{N} B_r(z_i)} |(f_n - f)(z)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \sup_{z \in B_r(z_i)} |(f_n - f)(z)| = \sum_{i=1}^{N} \|f_n - f\|_{L^\infty(B_r(z_i))} \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} C_{R,r} \cdot \|f_n - f\|_{L^2(B_R(z_i))} \\
&< \sum_{i=1}^{N} C_{R,r} \cdot \frac{\varepsilon}{N \cdot C_{R,r}} = N \cdot \frac{\varepsilon}{N} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von Ω_0. $\square$

Aufgabe 5 ((T) Cauchy Integralformel für Rechtecke)

Seien $x_0, y_0 < 0$ und $x_1, y_1 > 0$ Zahlen. Dann ist ein Rechteck $\square$ gegeben durch die vier Ecken $x_0 + \mathrm{i}y_1, x_1 + \mathrm{i}y_1, x_1 + \mathrm{i}y_0, x_0 + \mathrm{i}y_0$.

1. Berechnen Sie das Kurvenintegral
$$\int_{\partial\square} \frac{1}{z} \mathrm{d}z,$$
wobei der Rand $\partial\square$ des Rechtecks $\square$ gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

2. Folgern Sie daraus und mit dem Lemma von Goursat für Rechtecke (siehe auch Vorlesungsseite/ Übung) das die Cauchy Integralformel auch für Rechtecksränder gilt: Ist $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf Ω, sowie ein Rechteck (mit Rand) $\square \subseteq \Omega$ gegeben. Dann gilt für jeden Punkt $z_0 \in \square^\circ$ im Inneren von $\square$:
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial\square} \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z,$$
wobei der Rand $\partial\square$ des Rechtecks $\square$ gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

Lösung von Aufgabe 5

1. Der Rand des Rechtecks wird gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen. Dann können wir das Kurvenintegral in vier Integrale aufspalten:

$$\int_{\partial\square} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = \int_{\tau_{x_0+\mathrm{i}y_0, x_1+\mathrm{i}y_0}} \frac{1}{z}\mathrm{d}z + \int_{\tau_{x_1+\mathrm{i}y_0, x_1+\mathrm{i}y_1}} \frac{1}{z}\mathrm{d}z + \int_{\tau_{x_1+\mathrm{i}y_1, x_0+\mathrm{i}y_1}} \frac{1}{z}\mathrm{d}z + \int_{\tau_{x_0+\mathrm{i}y_1, x_0+\mathrm{i}y_0}} \frac{1}{z}\mathrm{d}z.$$

Da der Hauptzweig des Logarithmus eine Stammfunktion von $z \mapsto \frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C}^-$ bildet, können wir die drei ersten Integrale bestimmen:

$$\begin{aligned}
\int_{\tau_{x_0+\mathrm{i}y_0, x_1+\mathrm{i}y_0}} \frac{1}{z}\mathrm{d}z &= \mathrm{Log}\,(x_1+\mathrm{i}y_0) - \mathrm{Log}\,(x_0+\mathrm{i}y_0)\,,\\
\int_{\tau_{x_1+\mathrm{i}y_0, x_1+\mathrm{i}y_1}} \frac{1}{z}\mathrm{d}z &= \mathrm{Log}\,(x_1+\mathrm{i}y_1) - \mathrm{Log}\,(x_1+\mathrm{i}y_0)\,,\\
\int_{\tau_{x_1+\mathrm{i}y_1, x_0+\mathrm{i}y_1}} \frac{1}{z}\mathrm{d}z &= \mathrm{Log}\,(x_0+\mathrm{i}y_1) - \mathrm{Log}\,(x_1+\mathrm{i}y_1)\,.
\end{aligned}$$

Addition dieser drei Integrale ergibt:

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau_{x_0+\mathrm{i}y_0, x_1+\mathrm{i}y_0}} \frac{1}{z}\mathrm{d}z + \int_{\tau_{x_1+\mathrm{i}y_0, x_1+\mathrm{i}y_1}} \frac{1}{z}\mathrm{d}z + \int_{\tau_{x_1+\mathrm{i}y_1, x_0+\mathrm{i}y_1}} \frac{1}{z}\mathrm{d}z\\
&= \mathrm{Log}\,(x_1+\mathrm{i}y_0) - \mathrm{Log}\,(x_0+\mathrm{i}y_0) + \mathrm{Log}\,(x_1+\mathrm{i}y_1) - \mathrm{Log}\,(x_1+\mathrm{i}y_0) + \mathrm{Log}\,(x_0+\mathrm{i}y_1) - \mathrm{Log}\,(x_1+\mathrm{i}y_1)\\
&= \mathrm{Log}\,(x_0+\mathrm{i}y_1) - \mathrm{Log}\,(x_0+\mathrm{i}y_0)\,.
\end{aligned}$$

Weil $x_0, y_0 < 0$ und $y_1 > 0$ ist, können wir den Hauptzweig des Logarithmus laut Vorlesung ausschreiben zu

$$\begin{aligned}
\mathrm{Log}\,(x_0+\mathrm{i}y_1) - \mathrm{Log}\,(x_0+\mathrm{i}y_0) &= \log\left(|x_0+\mathrm{i}y_1|\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,(x_0+\mathrm{i}y_1) - \left(\log\left(|x_0+\mathrm{i}y_0|\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,(x_0+\mathrm{i}y_0)\right)\\
&= \log\left(\sqrt{x_0^2+y_1^2}\right) - \log\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right) + \mathrm{i}\left(\arctan\left(\frac{y_1}{x_0}\right) + \pi - \left(\arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \pi\right)\right)\\
&= 2\pi\mathrm{i} + \log\left(\sqrt{x_0^2+y_1^2}\right) - \log\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right) + \mathrm{i}\left(\arctan\left(\frac{y_1}{x_0}\right) - \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right).
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
\int_{\tau_{x_0+\mathrm{i}y_1, x_0+\mathrm{i}y_0}} \frac{1}{z}\mathrm{d}z &= \int_0^1 \frac{1}{x_0+\mathrm{i}y_1 + t\left(x_0+\mathrm{i}y_0 - (x_0+\mathrm{i}y_1)\right)} \cdot \left(x_0+\mathrm{i}y_0 - (x_0+\mathrm{i}y_1)\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{i}\,(y_0-y_1)}{x_0+\mathrm{i}y_1 + t\,(y_0-y_1)}\mathrm{d}t\\
&= \int_{y_1}^{y_0} \frac{\mathrm{i}}{x_0+\mathrm{i}y}\mathrm{d}y = \mathrm{i}\int_{y_1}^{y_0} \frac{x_0-\mathrm{i}y}{x_0^2+y^2}\mathrm{d}y\\
&= \mathrm{i}\left[\int_{y_1}^{y_0} \frac{x_0}{x_0^2+y^2}\mathrm{d}y - \mathrm{i}\int_{y_1}^{y_0} \frac{y}{x_0^2+y^2}\mathrm{d}y\right]\\
&= \mathrm{i}\left[\int_{y_1}^{y_0} \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x_0}\right)^2} \cdot x_0^{-1}\mathrm{d}y - \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{y_1}^{y_0} \frac{2y}{x_0^2+y^2}\mathrm{d}y\right]\\
&= \mathrm{i}\left(\left[\arctan\left(\frac{y}{x_0}\right)\right]_{y_1}^{y_0} - \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\log\left(x_0^2+y^2\right)\right]_{y_1}^{y_0}\right)\\
&= \mathrm{i}\left(\arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \arctan\left(\frac{y_1}{x_0}\right) - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\log\left(x_0^2+y_0^2\right) - \log\left(x_0^2+y_1^2\right)\right)\right)\\
&= -\mathrm{i}\left(\arctan\left(\frac{y_1}{x_0}\right) - \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right) - \left(\log\left(\sqrt{x_0^2+y_1^2}\right) - \log\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Also folgt für das Kurvenintegral

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\square} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} &+ \log\left(\sqrt{x_0^2+y_1^2}\right) - \log\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right) + \mathrm{i}\left(\arctan\left(\frac{y_1}{x_0}\right) - \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right)\\
&- \mathrm{i}\left(\arctan\left(\frac{y_1}{x_0}\right) - \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right) - \left(\log\left(\sqrt{x_0^2+y_1^2}\right) - \log\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right)\right)\\
= 2\pi\mathrm{i}.&
\end{aligned}$$

2. Sei $\square \subseteq \Omega$ ein beliebiges Rechteck in Ω und $z_0 \in \square^\circ$ ein beliebiger Puntk aus dem Inneren des Rechtecks $\square$. So ist $\square - z_0 := \{z \in \mathbb{C} \colon \exists w \in \square : z = w - z_0\} \subseteq \mathbb{C}$ wieder ein Rechteck mit $0 \in \square - z_0$, da $z_0 - z_0 = 0$ und $z_0 \in \square$. Es folgt also:

$$\int_{\partial\square} \frac{1}{z-z_0}\mathrm{d}z = \int_{\partial(\square - z_0)} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}$$

laut Teil 1.. Sei nun $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf Ω, so ist die Funktion

$$g\colon \Omega\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

holomorph auf $\Omega\backslash\{z_0\}$ und stetig fortsetzbar in z_0 durch $f'(z_0)$, also $g(z_0) := f'(z_0)$, da f holomorph ist. Es ist daher g stetig auf Ω und holomorph auf $\Omega\backslash\{z_0\}$. Daher können wir das Lemma von Goursat für Rechtecke verwenden (siehe erstes Übungsblatt Aufgabe 1 und Übungsmaterialien zur ersten Übung auf der Vorlesungsseite):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Box} g(z)\mathrm{d}z = \int_{\partial\Box} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\mathrm{d}z \\ &= \int_{\partial\Box} \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z - f(z_0)\int_{\partial\Box} \frac{1}{z - z_0}\mathrm{d}z \\ &= \int_{\partial\Box} \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z - 2\pi\mathrm{i} \cdot f(z_0) \\ \Leftrightarrow\ f(z_0) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\Box} \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z, \text{ nach Teil 1..} \end{aligned}$$

Da das Rechteck $\Box \subseteq \Omega$ und der Punkt $z_0 \in \Box^\circ$ beliebig waren, folgt die Behauptung. $\Box$

Aufgabe 6 ((T) Einige bekannte reelle Integrale)

Zeigen Sie die folgenden Integrale:

a. (Fixpunkt der Fouriertransformation) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\pi x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\pi\xi^2}$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$.
(Hinweis: Nutzen Sie aus, dass sie $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\mathrm{d}x = 1$ schon aus Analysis I/II kennen)

b. $\int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

c. $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

Lösung von Aufgabe 6

Zu b. und c.: Dafür zeigen wir erstmal einen Spezialfall vom Satz von Jordan:

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^\pi \mathrm{e}^{-r\sin(\varphi)}\mathrm{d}\varphi = 0.$$

Es gilt für $r > 0$ nach der Substitutionsregel und der Punktsymmetrie der Sinusfunktion

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \mathrm{e}^{-r\sin(\varphi)}\mathrm{d}\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-r\sin(\varphi)}\mathrm{d}\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{e}^{-r\sin(\varphi)}\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-r\sin(\varphi)}\mathrm{d}\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \mathrm{e}^{-r\sin(\pi-\varphi)}\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-r\sin(\varphi)}\mathrm{d}\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-r\sin(\varphi)}\mathrm{d}\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-r\sin(\varphi)}\mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

Aus Analysis I wissen wir, dass für $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ gilt $\sin(\varphi) \geq \frac{2}{\pi}\varphi$. Demnach folgt mit der Monotonie der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \mathrm{e}^{-r\sin(\varphi)}\mathrm{d}\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-r\sin(\varphi)}\mathrm{d}\varphi &\leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{2r}{\pi}\varphi}\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\left[\frac{-\pi}{2r}\mathrm{e}^{-\frac{2r}{\pi}\varphi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{r}\left(1 - \mathrm{e}^{-r}\right) \to 0,\ r \to \infty. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. Setze für b. und c. zu $r > \varepsilon > 0$ die zwei Kurven

$$\begin{aligned} \gamma_r^+ &: [0, \pi] \to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \\ \gamma_\varepsilon^- &: [0, \pi] \to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto -\varepsilon \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}. \end{aligned}$$

Setze dann die geschlossene stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma_{r,\varepsilon} := \tau_{-r,r} \oplus \gamma_\varepsilon^- \oplus \tau_{\varepsilon,r} \oplus \gamma_r^+$, so verläuft die Kurve $\gamma_{r,\varepsilon}$ ganz in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.
b. Definiere die Funktion

$$f(z) := \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2} \text{ für } z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

So ist die Funktion f holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Sei $r > \varepsilon > 0$ beliebig. Dann folgt nach dem Cauchy-Integralsatz:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_{r,\varepsilon}} f \mathrm{d}z \\ &= \int_{\tau_{-r,-\varepsilon}} f \mathrm{d}z + \int_{\gamma_\varepsilon^-} f \mathrm{d}z + \int_{\tau_{\varepsilon,r}} f \mathrm{d}z + \int_{\gamma_r^+} f \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Weiter gilt für das Integral über die Kurve γ_r^+ nach der Eulerschen Identität und der Dreiecks-Ungleichung

$$\begin{aligned} \left|\int_{\gamma_r^+} f \mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{1-\exp\left(\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)}{r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}} \cdot r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{d}\varphi\right| \\ &= \left|\int_0^\pi \frac{1-\exp\left(\mathrm{i}r\left(\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\varphi)\right)\right)}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\mathrm{d}\varphi\right| \\ &\leq \frac{1}{r}\int_0^\pi \left|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\cos(\varphi)} \cdot \mathrm{e}^{-r\sin(\varphi)}\right| \mathrm{d}\varphi \\ &\leq \frac{1}{r}\int_0^\pi 1\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{r}\int_0^\pi \mathrm{e}^{-r\sin(\varphi)}\mathrm{d}\varphi \\ &\leq \frac{\pi}{r} + \frac{1}{r}\int_0^\pi 1\mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi}{r} \to 0,\ r \to \infty. \end{aligned}$$

Andererseits können wir die beiden Integrale, welche über die horizontalen Kurven verlaufen, per Substitution umschreiben zu

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{-r,-\varepsilon}} f \mathrm{d}z &= \int_0^1 f(-r+t(-\varepsilon-(-r))) \cdot (-\varepsilon-(-r))\mathrm{d}t = \int_0^t (r-\varepsilon) \cdot f(-r+t(r-\varepsilon))\mathrm{d}t = \int_{-r}^{-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x, \\ \int_{\tau_{\varepsilon,r}} f \mathrm{d}z &= \int_0^1 f(\varepsilon+t(r-\varepsilon)) \cdot (r-\varepsilon)\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^r f(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Also folgt für $r \to \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} \int_{\tau_{-r,-\varepsilon}} f \mathrm{d}z &= \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x, \\ \lim_{r\to\infty} int_{\tau_{\varepsilon,r}} f \mathrm{d}z &= \lim_{r\to\infty} \int_\varepsilon^r f(x)\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^\infty f(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Zusammengefasst vereinfacht es sich durch Grenzwertbildung $r \to \infty$ zu

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_{r,\varepsilon}} f \mathrm{d}z &= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\gamma_\varepsilon^-} f \mathrm{d}z + \int_\varepsilon^\infty f(x)\mathrm{d}x + 0 \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_\varepsilon^\infty f(x)\mathrm{d}x &= \int_{\gamma_\varepsilon^-} f \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Das Kurvenintegral über die Kurve γ_ε^- können wir mit Hilfe von der Potenzreihenentwicklung von der Exponentialfunktion betrachten

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\varepsilon^-} f \mathrm{d}z = \int_{\gamma_\varepsilon^-} \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2}\mathrm{d}z &= \int_{\gamma_\varepsilon^-} z^{-2}\left(1-\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(\mathrm{i}z)^n\right)\mathrm{d}z \\ &= -\int_{\gamma_\varepsilon^-} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!}\mathrm{i}^n z^{n-2}\mathrm{d}z \\ &= -\int_{\gamma_\varepsilon^-} \left(\mathrm{i}z^{-1} + \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n!}\mathrm{i}^n z^{n-2}\right)\mathrm{d}z \\ &= -\int_0^\pi \frac{\mathrm{i}}{\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} \cdot \left(\varepsilon\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right) + \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n!}\mathrm{i}^n(-\varepsilon)^{n-2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-2)\varphi} \cdot \left(\varepsilon\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\pi 1\mathrm{d}\varphi - \sum_{n=2}^\infty \int_0^\pi \frac{1}{n!}\mathrm{i}^n(-\varepsilon)^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\varphi}\mathrm{d}\varphi \\
&= \pi - \sum_{n=2}^\infty \int_0^\pi \frac{1}{n!}\mathrm{i}^n(-\varepsilon)^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\varphi}\mathrm{d}\varphi,
\end{aligned}
$$

weil die Reihe absolut auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert können die Grenzübergänge vertauscht werden. Wegen der Stetigkeit der Potenzreihe sowie der Stetigkeit des Parameterintegrals folgt für $\varepsilon \to 0^+$:

$$
\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sum_{n=2}^\infty \int_0^\pi \frac{1}{n!}\mathrm{i}^n(-\varepsilon)^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\varphi}\mathrm{d}\varphi = \sum_{n=2}^\infty \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^\pi \frac{1}{n!}\mathrm{i}^n(-\varepsilon)^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\varphi}\mathrm{d}\varphi = 0.
$$

Damit folgt:

$$
\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon^-} f\mathrm{d}z = \pi.
$$

Nun folgt durch $\varepsilon \to 0^+$:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_\varepsilon^\infty f(x)\mathrm{d}x\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon^-} f\mathrm{d}z = \pi.
\end{aligned}
$$

Da $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \backslash\{0\}$ ist, folgt nun $\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$. Dies impliziert:

$$
\pi = \int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.
$$

Die Aussage folgt nun durch die Eulersche Identität und Betrachtung des Realteiles:

$$
\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1-\cos(x)-\mathrm{i}\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \mathrm{i}\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x,
$$

also ist

$$
\frac{\pi}{2} = \mathrm{Re}\left(\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x\right) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^2}\mathrm{d}x.
$$

Dies war zu zeigen.

c. Definiere die Funktion

$$
f(z) := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} \text{ für } z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.
$$

So ist die Funktion f holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Sei $r > \varepsilon > 0$ beliebig. Dann folgt nach dem Cauchy-Integralsatz:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\gamma_{r,\varepsilon}} f\mathrm{d}z \\
&= \int_{\tau_{-r,-\varepsilon}} f\mathrm{d}z + \int_{\gamma_\varepsilon^-} f\mathrm{d}z + \int_{\tau_{\varepsilon,r}} f\mathrm{d}z + \int_{\gamma_r^+} f\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

Weiter gilt für das Integral über die Kurve γ_r^+ nach der Eulerschen Identität und der Dreiecks-Ungleichung

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_r^+} f\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{\exp\left(\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} \cdot r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{d}\varphi\right| \\
&= \left|\int_0^\pi \exp\left(\mathrm{i}r\left(\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\varphi)\right)\right)\mathrm{d}\varphi\right| \\
&\le \int_0^\pi \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\cos(\varphi)} \cdot \mathrm{e}^{-r\sin(\varphi)}\right|\mathrm{d}\varphi \\
&\le \int_0^\pi \mathrm{e}^{-r\sin(\varphi)}\mathrm{d}\varphi \to 0,\; r\to\infty,
\end{aligned}
$$

laut dem bewiesenen Spezialfall vom Satz von Jordan. Andererseits können wir die beiden Integrale, welche über die horizontalen Kurven verlaufen, per Substitution umschreiben zu

$$
\int_{\tau_{-r,-\varepsilon}} f\mathrm{d}z = \int_0^1 f(-r+t(-\varepsilon-(-r)))\cdot(-\varepsilon-(-r))\mathrm{d}t = \int_0^t (r-\varepsilon)\cdot f(-r+t(r-\varepsilon))\mathrm{d}t = \int_{-r}^{-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x,
$$

$$\int_{\tau_{\varepsilon,r}} f\mathrm{d}z = \int_0^1 f(\varepsilon + t(r-\varepsilon)) \cdot (r-\varepsilon)\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^r f(x)\mathrm{d}x.$$

Also folgt für $r \to \infty$:

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\tau_{-r,-\varepsilon}} f\mathrm{d}z = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x,$$
$$\lim_{r\to\infty} \int_{\tau_{\varepsilon,r}} f\mathrm{d}z = \lim_{r\to\infty} \int_{\varepsilon}^{r} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

Zusammengefasst vereinfacht es sich durch Grenzwertbildung $r \to \infty$ zu

$$0 = \lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_{r,\varepsilon}} f\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\gamma_\varepsilon^-} f\mathrm{d}z + \int_\varepsilon^\infty f(x)\mathrm{d}x + 0$$
$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_\varepsilon^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int_{\gamma_\varepsilon^-} f\mathrm{d}z.$$

Das Kurvenintegral über die Kurve γ_ε^- können wir mit Hilfe von der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion betrachten

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_\varepsilon^-} f\mathrm{d}z &= \int_{\gamma_\varepsilon^-} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z = \int_{\gamma_\varepsilon^-} z^{-1} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} (\mathrm{i}z)^n \,\mathrm{d}z \\
&= \int_{\gamma_\varepsilon^-} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\mathrm{i}^n z^{n-1}\mathrm{d}z \\
&= \int_{\gamma_\varepsilon^-} \left(z^{-1} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!}\mathrm{i}^n z^{n-1} \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{-\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} \cdot \left(-\varepsilon\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right) + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!}\mathrm{i}^n(-\varepsilon)^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\varphi} \cdot \left(-\varepsilon\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right) \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^\pi \mathrm{i}\mathrm{d}\varphi - \sum_{n=2}^\infty \int_0^\pi \frac{1}{n!}\mathrm{i}^n(-\varepsilon)^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\varphi}\mathrm{d}\varphi \\
&= \mathrm{i}\pi - \sum_{n=1}^\infty \int_0^\pi \frac{1}{n!}\mathrm{i}^n(-\varepsilon)^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{d}\varphi,
\end{aligned}$$

weil die Reihe absolut auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert können die Grenzübergänge vertauscht werden. Wegen der Stetigkeit der Potenzreihe sowie der Stetigkeit des Parameterintegrals folgt für $\varepsilon \to 0^+$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\pi \frac{1}{n!}\mathrm{i}^n(-\varepsilon)^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{d}\varphi = \sum_{n=1}^\infty \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^\pi \frac{1}{n!}\mathrm{i}^n(-\varepsilon)^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}\mathrm{d}\varphi = 0.$$

Damit folgt:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon^-} f\mathrm{d}z = \mathrm{i}\pi.$$

Nun folgt durch $\varepsilon \to 0^+$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_\varepsilon^\infty f(x)\mathrm{d}x \right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon^-} f\mathrm{d}z = \mathrm{i}\pi.
\end{aligned}$$

Da $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \setminus\{0\}$ ist, folgt nun $\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$. Dies impliziert:

$$\mathrm{i}\pi = \int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{i}\frac{\pi}{2}.$$

Die Aussage folgt nun durch die Eulersche Identität und Betrachtung des Imaginärteiles:

$$\mathrm{i}\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x}\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x,$$

also ist

$$\frac{\pi}{2} = \mathrm{Im}\left(\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x \right) = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Dies war zu zeigen. $\square$

Aufgabe 7 ((T) Weitere Kurvenintegrale)

Bestimmen Sie die folgenden Kurvenintegrale, dabei seien $a, b \in \mathbb{C}$, $r > 0$ mit $|a| < r < |b|$ und Kurve $\gamma_r \colon [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ gegeben.

(a) $\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{1}{z-a}\mathrm{d}z$, (b) $\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{1}{z-b}\mathrm{d}z$, (c) $\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{1}{(z-a)\cdot(z-b)}\mathrm{d}z$, (d) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+3z}\mathrm{d}z$,

(e) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1}\mathrm{d}z$, (f) $\displaystyle\int_{|z+3|=3} \frac{z^3}{z^2+1}\mathrm{d}z$, (g) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z+1)^4}\mathrm{d}z$, (h) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z-\pi)^3}\mathrm{d}z$,

(i) $\displaystyle\int_{|z-2|=3} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cos(z)} \cdot \sin\left(z^4+1\right) - z}{(z-7)^{42}}\mathrm{d}z.$

Lösung von Aufgabe 7

(d) Definiere die Funktion $f(z) := \frac{\mathrm{e}^z}{z+3}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{-3\}$. So ist die Funktion f holomorph auf dem konvexen Gebiet $B_2(0)$, da $-3 \notin B_2(0)$ ist, und $\overline{B_1(0)} \subseteq B_2(0)$. Dann folgt mit der Cauchy Integralformel:

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+3z}\mathrm{d}z = \int_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^z}{(z+3)\cdot z}\mathrm{d}z = \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z-0}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}f(0) = \frac{2}{3}\pi\mathrm{i}.$$

(e)Für $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq \pm\mathrm{i}$ gilt nach Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+\mathrm{i})\cdot(z-\mathrm{i})} = \frac{\frac{\mathrm{i}}{2}}{z+\mathrm{i}} - \frac{\frac{\mathrm{i}}{2}}{z-\mathrm{i}}.$$

Die Funktion $f(z) := \frac{z^3}{2}\mathrm{i}$ ist im konvexen Gebiet $\mathbb{C}$ holomorph, und $\overline{B_2(0)} \subseteq \mathbb{C}$, sowie $\pm\mathrm{i} \in B_2(0)$. Dann folgt mit der Cauchy Integralformel:

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1}\mathrm{d}z &= \int_{|z|=2} \left(\frac{\frac{z^3}{2}\mathrm{i}}{z-(-\mathrm{i})} - \frac{\frac{z^3}{2}\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} \right)\mathrm{d}z \\
&= \int_{|z|=2} \frac{\frac{z^3}{2}\mathrm{i}}{z-(-\mathrm{i})}\mathrm{d}z - \int_{|z|=2} \frac{\frac{z^3}{2}\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\mathrm{i}f(-\mathrm{i}) - 2\pi\mathrm{i}f(\mathrm{i}) \\
&= 2\pi\mathrm{i}\frac{(-\mathrm{i})^3}{2}\mathrm{i} - 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}^3}{2}\mathrm{i} = -\pi\mathrm{i} - \pi\mathrm{i} = -2\pi\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

(f) Wegen $|\pm\mathrm{i}+3| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} > 3$ liegen die Nullstellen $\pm\mathrm{i}$ des Polynomes $z \mapsto z^2+1$ nicht in $B_3(-3)$. Wähle $r \in \left(3, \sqrt{10}\right)$, so ist $B_r(-3)$ ein konvexes Gebiet mit $\overline{B_3(-3)} \subseteq B_r(-3)$. Weiter ist die Funktion $f(z) := \frac{z^3}{z^2+1}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$, eine holomorphe Funktion auf $B_r(-3)$. So folgt mit dem Cauchy Integralsatz:

$$\int_{|z+3|=3} \frac{z^3}{z^2+1}\mathrm{d}z = \int_{|z+3|=3} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

(g) Setze $f(z) := \mathrm{e}^{2z}$, $z \in \mathbb{C}$, so ist f eine holomorphe Funktion auf dem konvexen Gebiet $\mathbb{C}$. Es ist der Punkt $-1 \in B_2(0)$ und $\overline{B_2(0)} \subseteq \mathbb{C}$. Die ersten drei Ableitungen von f in $z \in \mathbb{C}$ lauten:

$$\begin{aligned}
f'(z) &= 2\mathrm{e}^{2z}, \\
f''(z) &= 4\mathrm{e}^{2z}, \\
f'''(z) &= 8\mathrm{e}^{2z}.
\end{aligned}$$

Die Cauchy Integralformel für Ableitungen leifert nun

$$\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z+1)^4}\mathrm{d}z = \int_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z+1)^{3+1}}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\frac{f'''(-1)}{3!} = 2\pi\mathrm{i}\frac{8\mathrm{e}^{-2}}{6} = \frac{8\pi\mathrm{i}}{3\mathrm{e}^2}.$$

(h) Definiere die Funktion $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $f(z) := z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$. So ist die Funktion f holomorph auf dem konvexen Gebiet $\mathbb{C}$. Weiter sind die Ableitungen von f in $z \in \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + z \cdot \left(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right) = (1+\mathrm{i}z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}, \\
f''(z) &= \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + (1+\mathrm{i}z) \cdot \left(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right) = (2\mathrm{i}-z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}.
\end{aligned}$$

Dann gilt nach der Cauchy-Integralformel für Ableitungen, weil $|\pi| \leq \frac{7}{2} < 4$ ist:

$$\begin{aligned}\int_{|z|=4} \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z-\pi)^3}\mathrm{d}z &= \int_{|z|=4} \frac{f(z)}{(z-\pi)^3}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\frac{f''(\pi)}{2!} \\ &= \pi\mathrm{i}\cdot(2\mathrm{i}-\pi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \left(-2\pi-\pi^2\mathrm{i}\right)\cdot(-1) = 2\pi + \mathrm{i}\pi^2,\end{aligned}$$

da $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$ ist.

(i) Es gilt $|7-2| = 5 > 3$, daher ist $7 \notin B_3(2)$. Setze die Funktion $f(z) := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cos(z)}\sin\left(z^4+1\right)-z}{(z-7)^{42}}$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\{7\}$. So ist f holomorph auf der konvexen Menge $B_4(2)$ und $\overline{B_3(2)} \subseteq B_4(2)$. Dann folgt nach dem Cauchy-Integralsatz:

$$\int_{|z-2|=3} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cos(z)}\sin\left(z^4+1\right)-z}{(z-7)^{42}}\mathrm{d}z = \int_{\partial B_4(2)} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

$\square$