18.05.2016
Prof. Dr. Tobias Lamm
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Funktionentheorie

3. Übungsblatt

Aufgabe 1 ((Ü) Beweise zu Liouville)

a. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, die nicht konstant ist. Zeigen Sie, dass zu jedem Punkt $w \in \mathbb{C}$ eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ existiert mit $f(z_n) \to w$ für $n \to \infty$.

b. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit $f(z) \notin \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Funktion f konstant sein muss.

c. (Verallgemeinerung von Liouville) Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Zeigen Sie, dass folgende Äquivalenz gilt:

   c1. Die Funktion f ist ein Polynom mit Grad $\deg(f) \leq n$.

   c2. Es gibt positive Konstanten $A, B > 0$ mit
   $$|f(z)| \leq A + B|z|^n \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

d. Zeigen Sie: Ist $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit einseitig beschränktem Realteil, so ist die Funktion f konstant.

Aufgabe 2 ((Ü) Beispiele zum Identitätssatz)

1. Geben Sie zu jeder der folgenden Eigenschaften an, ob es eine Funktion f gibt, die in einer Umgebung um den Nullpunkt holomorph ist und die jeweilige Eigenschaft erfüllt. (Stets für alle $n \in \mathbb{N}$ ab einem Wert $n_0 \in \mathbb{N}$).

   (1) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$.

   (2) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$.

   (3) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$.

   (4) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}$.

2. Sei $P \in \mathbb{C}[x, y]$ ein komplexes nicht-konstantes Polynom in zwei Veränderlichen, und $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sowie $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf Ω mit
   $$P\left(\mathrm{Re}\left(f(z)\right), \mathrm{Im}\left(f(z)\right)\right) = 0$$
   für alle $z \in \Omega$. Zeigen Sie, dass die Funktion f konstant ist.

Aufgabe 3 ((Ü) Aufgabe zum Maximumsprinzip)

1. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f_1, f_2 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jeweils das Maximum und Minimum auf der Menge $\overline{B_1(0)}$.

$$(a)\ f_1(z) := \mathrm{e}^{z^2}, \qquad (b)\ f_2(z) := z^2 + z - 1.$$

2. Setze die Funktion $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right)$ und den vertikalen Streifen $\Omega := \left\{z \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{\pi}{2}\right\}$. Zeigen Sie, dass $|f|$ auf dem Rand von Ω konstant 1 ist, aber dennoch auf Ω unbeschränkt ist. Wieso ist das kein Widerspruch zu Aufgabe 3.2. auf dem zweiten Übungsblatt?