18.05.2016
Prof. Dr. Tobias Lamm
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Funktionentheorie

3. Übungsblatt - Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 ((Ü) Beweise zu Liouville)

a. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, die nicht konstant ist. Zeigen Sie, dass zu jedem Punkt $w \in \mathbb{C}$ eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ existiert mit $f(z_n) \to w$ für $n \to \infty$.

b. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit $f(z) \notin \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Funktion f konstant sein muss.

c. (Verallgemeinerung von Liouville) Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Zeigen Sie, dass folgende Äquivalenz gilt:

c1. Die Funktion f ist ein komplexes Polynom mit Grad $\deg(f) \leq n$.

c2. Es gibt positive Konstanten $A, B > 0$ mit

$$|f(z)| \leq A + B|z|^n \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

d. Zeigen Sie: Ist $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit einseitig beschränktem Realteil, so ist die Funktion f konstant.

Lösung von Aufgabe 1

b. Angenommen die Funktion f ist nicht konstant. Laut dem Teil a. muss die Funktion f Werte in der unteren und der oberen Halbebene annehmen. Die untere Halbebene ist $\mathbb{H}^- := \{z \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{Im}(z) < 0\}$ und die obere Halbebene ist $\mathbb{H}^+ := \{z \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Wir finden also Punkte $w_1, w_2 \in f(\mathbb{C})$ mit $\mathrm{Im}\,(w_1) < 0$ und $\mathrm{Im}\,(w_2) > 0$, da $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{H}^- \cup \mathbb{H}^+$ ist. Die beiden Mengen $\mathbb{H}^-$ und $\mathbb{H}^+$ sind offen und zueinander offensichtlich disjunkt. Also ist die Funktion

$$\chi\colon \mathbb{H}^- \cup \mathbb{H}^+ \to \{0,1\}, w \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } \mathrm{Im}(w) > 0 \\ 1, & \text{falls } \mathrm{Im}(z) < 0 \end{cases}$$

stetig auf $\mathbb{H}^- \cup \mathbb{H}^+$. Weiter ist die Funktion χ lokal-konstant und insbesondere ist $\chi|_{f(\mathbb{C})}$ stetig. Da die Funktion f insbesondere stetig ist, ist $f(\mathbb{C})$ zusammenhängend, da $\mathbb{C}$ zusammenhängend ist, demnach muss wegen der lokalen Konstantheit von χ die Funktion $\chi|_{f(\mathbb{C})}$ konstant sein. Allerdings gilt:

$$\chi|_{f(\mathbb{C})}\,(w_1) = \chi\,(w_1) = 1 \neq 0 = \chi\,(w_2) = \chi|_{f(\mathbb{C})}\,(w_2)\,.$$

Dies ist ein Widerspruch, demnach war die Annahme falsch und die Funktion f muss konstant sein.

d. Betrachten wir erst den Fall, dass die Funktion f einen nach unten beschränkten Realteil hat, d.h. es existiert eine Konstante $C_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathrm{Re}\,(f(z)) \geq C_1 \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} |f(z) - C_1 + 1| &= \left(|\mathrm{Re}\,(f(z) - C_1 + 1)|^2 + |\mathrm{Im}\,(f(z) - C_1 + 1)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq |\mathrm{Re}\,(f(z) - C_1 + 1)| \\ &\geq \mathrm{Re}\,(f(z) - C_1 + 1) = \mathrm{Re}\,(f(z)) - C_1 + 1 \geq C_1 - C_1 + 1 = 1 > 0. \end{aligned}$$

Setze nun die Funktion $g_1\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$z \mapsto \frac{1}{f(z) - C_1 + 1}.$$

So ist die Funktion g_1 holomorph auf ganz $\mathbb{C}$, also ist g_1 eine ganze Funktion, und es ist $g_1 \neq 0$ auf $\mathbb{C}$. Zudem ist die Funktion g_1 beschränkt, da für alle $z \in \mathbb{C}$

$$|g_1(z)| = \left|\frac{1}{f(z) - C_1 + 1}\right| = \frac{1}{|f(z) - C_1 + 1|} \leq \frac{1}{1} = 1$$

gilt. Laut dem Satz von Lioville ist somit die Funktion g_1 konstant einem Wert $\lambda_1 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, d.h. es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\lambda_1 = g_1(z) = \frac{1}{f(z) - C_1 + 1} \;\Leftrightarrow\; f(z) - C_1 + 1 = \frac{1}{\lambda_1} \;\Leftrightarrow\; f(z) = C_1 - 1 + \frac{1}{\lambda_1}.$$

So ist auch die Funktion f konstant auf $\mathbb{C}$.
Hat nun die Funktion f einen nach oben beschränkten Realteil, so existiert eine Konstante $C_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{Re}(f(z)) \leq C_2 \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}|C_2 + 1 - f(z)| &= \left(|\operatorname{Re}(C_2 + 1 - f(z))|^2 + |\operatorname{Im}(C_2 + 1 - f(z))|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq |\operatorname{Re}(C_2 + 1 - f(z))| \\ &\geq \operatorname{Re}(C_2 + 1 - f(z)) = C_2 + 1 - \operatorname{Re}(f(z)) \geq C_2 + 1 - C_2 = 1 > 0.\end{aligned}$$

Setze nun die Funktion $g_2 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$z \mapsto \frac{1}{C_2 + 1 - f(z)}.$$

So ist die Funktion g_2 holomorph auf ganz $\mathbb{C}$, also ist g_2 eine ganze Funktion, und es ist $g_2 \neq 0$ auf $\mathbb{C}$. Zudem ist die Funktion g_2 beschränkt, da für alle $z \in \mathbb{C}$

$$|g_2(z)| = \left|\frac{1}{C_2 + 1 - f(z)}\right| = \frac{1}{|C_2 + 1 - f(z)|} \leq \frac{1}{1} = 1$$

gilt. Laut dem Satz von Lioville ist somit die Funktion g_2 konstant einem Wert $\lambda_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, d.h. es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}&\lambda_2 = g(z) = \frac{1}{C_2 + 1 - f(z)} \;\Leftrightarrow\; C_2 + 1 - f(z) = \frac{1}{\lambda_2} \;\Leftrightarrow\; -f(z) = \frac{1}{\lambda_2} - C_2 - 1 \\ \Leftrightarrow\;& f(z) = C_2 + 1 - \frac{1}{\lambda_2}.\end{aligned}$$

So ist auch die Funktion f konstant auf $\mathbb{C}$. □

Aufgabe 2 ((Ü) Beispiele zum Identitätssatz)

1. Geben Sie zu jeder der folgenden Eigenschaften an, ob es eine Funktion f gibt, die in einer Umgebung um den Nullpunkt holomorph ist und die jeweilige Eigenschaft erfüllt. (Stets für alle $n \in \mathbb{N}$ ab einem Wert $n_0 \in \mathbb{N}$).

   (1) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$.

   (2) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$.

   (3) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$.

   (4) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}$.

2. Sei $P \in \mathbb{C}[x, y]$ ein komplexes nicht-konstantes Polynom in zwei Veränderlichen, und $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sowie $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf Ω mit

   $$P(\operatorname{Re}(f(z)), \operatorname{Im}(f(z))) = 0$$

   für alle $z \in \Omega$. Zeigen Sie, dass die Funktion f konstant ist.

Aufgabe 3 ((Ü) Aufgabe zum Maximumsprinzip)

1. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f_1, f_2 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jeweils das Maximum und Minimum auf der Menge $\overline{B_1(0)}$.

$$(a)\ f_1(z) := \mathrm{e}^{z^2}, \qquad (b)\ f_2(z) := z^2 + z - 1.$$

2. Setze die Funktion $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right)$ und den vertikalen Streifen $\Omega := \left\{z \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{\pi}{2}\right\}$. Zeigen Sie, dass $|f|$ auf dem Rand von Ω konstant 1 ist, aber dennoch auf Ω unbeschränkt ist. Wieso ist das kein Widerspruch zu Aufgabe 3.2. auf dem zweiten Übungsblatt?