02.06.2016
Prof. Dr. Tobias Lamm
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Funktionentheorie

4. Übungsblatt

Aufgabe 1 ((Ü) Berechnung des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$)

Ziel dieser Aufgabe soll es sein das bekannte reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

zu berechnen. Definieren wir dazu den Punkt $a := (1+\mathrm{i})\sqrt{\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{C}$ und die Funktion $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ durch

$$g(z) := \frac{\mathrm{e}^{-z^2}}{1+\mathrm{e}^{-2az}}.$$

Weiter sei zu zwei komplexen Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ die Verbindungsstrecke von w zu z gegeben durch

$$\tau_{w,z}(t) := w + t\cdot(z-w) \text{ für } t \in [0,1].$$

So wird zu positiven Zahlen $r, s > 0$ ein Rechteck $\square_{r,s,a}$ definiert mit Eckpunkten $-r, s, s+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(a), -r+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(a)$.

1. Zeigen Sie, dass $a^2 = \mathrm{i}\pi$ ist und folgern Sie daraus, dass

   $$g(z) - g(z+a) = e^{-z^2}$$

   gilt. Wo hat die Funktion g einfache Pole?

2. Zeigen Sie, dass

   $$\int_{\tau_{-r+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(a),-r}} g(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad \int_{\tau_{s,s+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(a)}} g(\xi)\mathrm{d}\xi \to 0 \text{ für } r,s\to\infty$$

   gilt.

3. Berechnen Sie nun das Residuum der Funktion g im Punkt $\frac{1}{2}a$ und folgern Sie anschließend mit Hilfe des Residuensatzes, dass das Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ ist.

Aufgabe 2 ((Ü) Poissonsche Summenformel)

In dieser Aufgabe wollen wir in Anknüpfung an die Aufgabe 2. vom Übungsblatt 2. die Poissonsche Summenformel zeigen, d.h. für $f \in \mathcal{F}$ gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n),$$

wobei $\widehat{f}$ die Fouriertransformierte der Funktion f meint. Zu einer Funktion $f \in \mathcal{F}$ setzen wir die Funktion g_f durch

$$g_f(z) := \frac{f(z)}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}-1}.$$

1. Wo hat die Funktion g einfache Pole und wie sehen die Residuen darin aus?

2. Sei von nun an $f \in \mathcal{F}_a$ zu einem $a > 0$, und sei $b \in (0,a)$. Betrachte die Kurve des Rechtecks $\square_N$ mit den Eckpunkten $-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b, -N-\frac{1}{2}-\mathrm{i}b, N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b, N+\frac{1}{2}+\mathrm{i}b$. Zeigen Sie, wie bei Aufgabe 1., dass die Integrale

   $$\int_{\tau_{-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b,-N-\frac{1}{2}-\mathrm{i}b}} g_f(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad \int_{\tau_{N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b,N+\frac{1}{2}+\mathrm{i}b}} g_f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

   über die beiden vertikalen Seiten des Rechtecks $\square_N$ für $N\to\infty$ gegen null konvergieren.

3. Folgern Sie damit, dass

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \lim_{N\to\infty}\left[\int_{\tau_{-N-\frac{1}{2}-\mathrm{i}b,N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b}} g(\xi)\mathrm{d}\xi - \int_{\tau_{N+\frac{1}{2}+\mathrm{i}b,-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b}} g(\xi)\mathrm{d}\xi\right]$$

ist.

4. Nutzen Sie die geometrische Reihe aus um den Integranden passend umzuschreiben und folgern Sie dann durch zusammenfassen die Poissonsche Summenformel, also dass

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$$

gilt.

Aufgabe 3 ((T) Formeln für das Residuum)

Sei ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ gegeben.

1. Sei der Radius $r > 0$ und die Ordung $m \in \mathbb{N}$ gegeben. Ist die Funktion $f\colon B_r(z_0)\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph auf $B_r(z_0)\setminus\{z_0\}$ und hat die Funktion f im Punkt z_0 einen Pol m-ter Ordnung, so zeigen Sie, dass dann für das Residuum der Funktion f im Punkt z_0 folgende Formel gilt:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left(f(z)\cdot(z-z_0)^m\right)\right).$$

Im Spezialfall $m = 1$ gilt somit für das Residuum von der Funktion f im Punkt z_0

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)\cdot(z-z_0).$$

2. Seien f, g in einer Umgebung um den Punkt z_0 holomorphe Funktionen und die Funktion g habe eine einfache Nullstelle im Punkt z_0. Zeigen Sie, dass dann für das Residuum der Funktion $\frac{f}{g}$ im Punkt z_0 die folgende Formel gilt:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Aufgabe 4 ((Ü))

1. Zeigen Sie: Sind $f, g\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ zwei ganze Funktionen mit $|f(z)| \le |g(z)|$, so gibt es eine Zahl $c \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = c\cdot g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

2. Sei $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ eine ganze Funktion und setze die Funktion $g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$ für $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion g eine wesentliche Singularität in der Null hat, genau dann, wenn f kein Polynom ist.

3. Sei $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ eine ganze Funktion, die kein Polynom ist und $\omega \in \mathbb{C}$ ein Punkt. Zeigen Sie, dass es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ gibt mit $|z_n| \to \infty$ und $f(z_n) \to \omega$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 5 ((T) Integrale berechnen mit dem Residuensatz)

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x$ für $n \in \mathbb{N},\ n$ gerade,

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x$ für $n \in \mathbb{N},\ n \ge 3$ ungerade,

(c) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\cos(z)}{1+z^2}\mathrm{d}z,$

(d) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1}\mathrm{d}z,$

(e) $\displaystyle\int_{|z|=2} \exp\left(\frac{z}{1-z}\right)\mathrm{d}z,$

(f) $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{z}{\cosh(z)-1}\mathrm{d}z,$

wobei γ die geschlossene Kurve ist, die den Rand des Gebietes

$$E := \left\{ z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \colon y^2 < \left(4\pi^2 - 1\right) \cdot \left(1 - x^2\right) \right\} \subseteq \mathbb{C}$$

gegen den Uhrzeigersinn durchläuft.

Aufgabe 6 ((T) Laurentreihen und Regeln von de l'Hospital)

1. Definiere die Funktion $f \colon \mathbb{C} \backslash \{-1, 1, 3\} \to \mathbb{C}$ durch

$$f(z) := \frac{1}{1 - z^2} + \frac{1}{3 - z}.$$

Bestimmen Sie die Laurentreihe der Funktion f einmal im Kreisring

$$A := \{z \in \mathbb{C} \colon 1 < |z| < 3\} \text{ und einmal im Kreisring } B := \{z \in \mathbb{C} \colon 1 < |z - 2| < 3\}.$$

2. Seien $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f, g \colon \Omega \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen auf Ω, die nicht konstant null sind. Weiter haben die Funktionen f und g im Punkt $z_0 \in \Omega$ Nullstellen der Ordnung $n \in \mathbb{N}_0$ bzw. $m \in \mathbb{N}_0$. Wir bezeichnen mit $N(g)$ die Nullstellenmenge der Funktion g, d.h. also

$$N(g) := \{z \in \Omega \colon g(z) = 0\}.$$

Dann setzen wir die Funktion $h \colon \Omega \backslash N(g) \to \mathbb{C}$ durch

$$h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}.$$

Zeigen Sie, dass falls $n \geq m$ ist, hat die Funktion h im Punkt z_0 eine hebbare Singularität und kann so im Punkt z_0 durch

$$h(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(m)}(z_0)}{g^{(m)}(z_0)}$$

holomorph fortgesetzt werden.
Zeigen Sie weiter: Gilt andernfalls $n < m$, so hat die Funktion h im Punkt z_0 einen Pol der Ordnung $m - n$.