02.06.2016
Prof. Dr. Tobias Lamm
M.Sc. Michael Ullmann

# Funktionentheorie

## 4. Übungsblatt - Lösungsvorschläge

### Aufgabe 1 ((Ü) Berechnung des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$)

Ziel dieser Aufgabe soll es sein das bekannte reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$$

zu berechnen. Definieren wir dazu den Punkt $a := (1+\mathrm{i})\sqrt{\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{C}$ und die Funktion $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ durch

$$g(z) := \frac{\mathrm{e}^{-z^2}}{1+\mathrm{e}^{-2az}}.$$

Weiter sei zu zwei komplexen Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ die Verbindungsstrecke von $w$ zu $z$ gegeben durch

$$\tau_{w,z}(t) := w + t \cdot (z-w) \text{ für } t \in [0,1].$$

So wird zu positiven Zahlen $r, s > 0$ ein Rechteck $\square_{r,s,a}$ definiert mit Eckpunkten $-r, s, s + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(a), -r + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(a)$.

1. Zeigen Sie, dass $a^2 = \mathrm{i}\pi$ ist und folgern Sie daraus, dass
$$g(z) - g(z+a) = e^{-z^2}$$
gilt. Wo hat die Funktion $g$ einfache Pole?

2. Zeigen Sie, dass
$$\int_{\tau_{-r+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(a),-r}} g(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad \int_{\tau_{s,s+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(a)}} g(\xi)\mathrm{d}\xi \to 0 \text{ für } r,s\to\infty$$
gilt.

3. Berechnen Sie nun das Residuum der Funktion $g$ im Punkt $\frac{1}{2}a$ und folgern Sie anschließend mit Hilfe des Residuensatzes, dass das Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ ist.

### Aufgabe 2 ((Ü) Poissonsche Summenformel)

In dieser Aufgabe wollen wir in Anknüpfung an die Aufgabe 2. vom Übungsblatt 2. die Poissonsche Summenformel zeigen, d.h. für $f \in \mathcal{F}$ gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n),$$

wobei $\widehat{f}$ die Fouriertransformierte der Funktion $f$ meint. Zu einer Funktion $f \in \mathcal{F}$ setzen wir die Funktion $g_f$ durch

$$g_f(z) := \frac{f(z)}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z} - 1}.$$

1. Wo hat die Funktion $g$ einfache Pole und wie sehen die Residuen darin aus?

2. Sei von nun an $f \in \mathcal{F}_a$ zu einem $a > 0$, und sei $b \in (0,a)$. Betrachte die Kurve des Rechtecks $\square_N$ mit den Eckpunkten $-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b, -N-\frac{1}{2}-\mathrm{i}b, N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b, N+\frac{1}{2}+\mathrm{i}b$. Zeigen Sie, wie bei Aufgabe 1., dass die Integrale
$$\int_{\tau_{-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b,-N-\frac{1}{2}-\mathrm{i}b}} g_f(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad \int_{\tau_{N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b,N+\frac{1}{2}+\mathrm{i}b}} g_f(\xi)\mathrm{d}\xi$$
über die beiden vertikalen Seiten des Rechtecks $\square_N$ für $N\to\infty$ gegen null konvergieren.

3. Folgern Sie damit, dass

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \lim_{N\to\infty}\left[\int_{\tau_{-N-\frac{1}{2}-\mathrm{i}b,N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b}} g(\xi)\mathrm{d}\xi - \int_{\tau_{N+\frac{1}{2}+\mathrm{i}b,-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b}} g(\xi)\mathrm{d}\xi\right]$$

ist.

4. Nutzen Sie die geometrische Reihe aus um den Integranden passend umzuschreiben und folgern Sie dann durch zusammenfassen die Poissonsche Summenformel, also dass

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$$

gilt.

**Lösung von Aufgabe 2**

Sei für die ganze Aufgabe die Funktion $f \in \mathcal{F}$, d.h. es gibt eine Konstante $a > 0$ mit $f \in \mathcal{F}_a$ und weiter wähle $b \in (0, a)$ fest.

1. Wir untersuchen die Funktion $g$ auf Singulartitäten auf dem horizontalen Streifen $S_a$. Der Nenner der Funktion $g$ hat Nullstellen in:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z} - 1 = 0 \;&\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z} = 1 = \mathrm{e}^{2\pi k\mathrm{i}},\ k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; 2\pi\mathrm{i}z = 2\pi k\mathrm{i},\ k\in\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow\; z = k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Die Stellen $z = k,\ k \in \mathbb{Z}$, sind Pole erster Ordnung von der Funktion $g$, denn es gilt für $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} (z-k)g(z) &= (z-k)\cdot\frac{f(z)}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}-1} = f(z)\cdot(z-k)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(2\pi\mathrm{i})^n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k}(z-k)^n - 1\right)^{-1} \\ &= f(z)\cdot(z-k)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(2\pi\mathrm{i})^n(z-k)^n + \frac{1}{0!}(2\pi\mathrm{i})^0(z-k)^0 - 1\right)^{-1} \\ &= f(z)\cdot(z-k)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(2\pi\mathrm{i})^n(z-k)^n + 1 - 1\right)^{-1} \\ &= f(z)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(2\pi\mathrm{i})^n(z-k)^{n-1}\right)^{-1} \\ &= f(z)\cdot\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(l+1)!}(2\pi\mathrm{i})^{l+1}(z-k)^{l}\right)^{-1} \\ &= f(z)\cdot\left(\frac{1}{(0+1)!}(2\pi\mathrm{i})^{0+1}(z-k)^0 + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(l+1)!}(2\pi\mathrm{i})^{l+1}(z-k)^{l}\right)^{-1} \\ &= f(z)\cdot\left(2\pi\mathrm{i} + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(l+1)!}(2\pi\mathrm{i})^{l+1}(z-k)^{l}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

So folgt direkt für das Residuum von der Funktion $g$ an der Stelle $k \in \mathbb{Z}$ nach Aufgabe 3.1:

$$\operatorname{Res}(g,k) = \lim_{z\to k}(z-k)\cdot g(z) = \lim_{z\to k} f(z)\cdot\left(2\pi\mathrm{i} + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(l+1)!}(2\pi\mathrm{i})^{l+1}(z-k)^{l}\right)^{-1} = f(k)\cdot(2\pi\mathrm{i})^{-1} = \frac{f(k)}{2\pi\mathrm{i}}.$$

2. Es gilt für $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left|\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\left(-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b-\mathrm{i}tb\right)} - 1\right| &= \left|\mathrm{e}^{-2\pi N\mathrm{i}}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}\cdot\mathrm{e}^{-2\pi b(1-t)} - 1\right| \\ &= \left|-\mathrm{e}^{-2\pi b(1-t)} - 1\right| = \left|1 + \mathrm{e}^{-2\pi b(1-t)}\right| = 1 + \mathrm{e}^{-2\pi b(1-t)} > 1, \\ \left|\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\left(N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b+\mathrm{i}tb\right)} - 1\right| &= \left|\mathrm{e}^{2\pi N\mathrm{i}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\cdot\mathrm{e}^{-2\pi b(1-t)} - 1\right| \\ &= \left|-\mathrm{e}^{-2\pi b(1-t)} - 1\right| = \left|1 + \mathrm{e}^{-2\pi b(1-t)}\right| = 1 + \mathrm{e}^{-2\pi b(1-t)} > 1. \end{aligned}$$

Daher gilt mit der Abschätzung für den moderaten Abfall von der Funktion $f$ und der Dreiecks-Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\tau_{-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b,-N-\frac{1}{2}-\mathrm{i}b}} g(\xi)\mathrm{d}\xi\right| \\
&= \left|\int_0^1 g\left(-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b+t\cdot\left(-N-\frac{1}{2}-\mathrm{i}b-\left(-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b\right)\right)\right)\cdot\left(-N-\frac{1}{2}-\mathrm{i}b-\left(-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b\right)\right)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^1 \left|g\left(-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b+t\cdot\left(-N-\frac{1}{2}-\mathrm{i}b+N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b\right)\right)\cdot\left(-N-\frac{1}{2}-\mathrm{i}b+N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b\right)\right|\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left|g\left(-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b-\mathrm{i}tb\right)\right|\cdot|-\mathrm{i}b|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left|\frac{f\left(-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b-\mathrm{i}tb\right)}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\left(-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b-\mathrm{i}tb\right)}-1}\right|\cdot b\mathrm{d}t \\
&= b\int_0^1 \frac{\left|f\left(-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b-\mathrm{i}tb\right)\right|}{\left|\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\left(-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b-\mathrm{i}tb\right)}-1\right|}\mathrm{d}t \\
&\leq b\int_0^1 \frac{\left|f\left(-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b-\mathrm{i}tb\right)\right|}{1}\mathrm{d}t \\
&\leq b\int_0^1 \frac{A}{1+\left(-N-\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}t = \frac{Ab}{1+\left(N+\frac{1}{2}\right)^2} \to 0 \text{ für } N\to\infty, \\
&\left|\int_{\tau_{N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b,N+\frac{1}{2}+\mathrm{i}b}} g(\xi)\mathrm{d}\xi\right| \\
&= \left|\int_0^1 g\left(N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b+t\cdot\left(N+\frac{1}{2}+\mathrm{i}b-\left(N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b\right)\right)\right)\cdot\left(N+\frac{1}{2}+\mathrm{i}b-\left(N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b\right)\right)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^1 \left|g\left(N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b+t\cdot\left(N+\frac{1}{2}+\mathrm{i}b-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b\right)\right)\cdot\left(N+\frac{1}{2}+\mathrm{i}b-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b\right)\right|\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left|g\left(N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b+\mathrm{i}tb\right)\right|\cdot|\mathrm{i}b|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left|\frac{f\left(N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b+\mathrm{i}tb\right)}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\left(N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b+\mathrm{i}tb\right)}-1}\right|\cdot b\mathrm{d}t \\
&= b\int_0^1 \frac{\left|f\left(N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b+\mathrm{i}tb\right)\right|}{\left|\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\left(N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b+\mathrm{i}tb\right)}-1\right|}\mathrm{d}t \\
&\leq b\int_0^1 \frac{\left|f\left(N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b+\mathrm{i}tb\right)\right|}{1}\mathrm{d}t \\
&\leq b\int_0^1 \frac{A}{1+\left(N+\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}t = \frac{Ab}{1+\left(N+\frac{1}{2}\right)^2} \to 0 \text{ für } N\to\infty.
\end{aligned}
$$

Damit gilt nun auch

$$
\begin{aligned}
\int_{\tau_{-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b,-N-\frac{1}{2}-\mathrm{i}b}} g(\xi)\mathrm{d}\xi &\to 0, \text{ für } N\to\infty, \\
\int_{\tau_{N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b,N+\frac{1}{2}+\mathrm{i}b}} g(\xi)\mathrm{d}\xi &\to 0, \text{ für } N\to\infty.
\end{aligned}
$$

3. Für $N\in\mathbb{N}$ durchläuft die Kurve $\gamma_N$, die den Rand des Rechtecks $\square_N$ entlangläuft, gerade die Pole $k\in\mathbb{Z}$ erster Ordnung gegen den Uhrzeigersinn für die $|k|\leq N$ gilt, so liefert der Residuensatz nun:

$$\int_{\square_N} g(\xi)\mathrm{d}\xi = 2\pi\mathrm{i}\sum_{n=-N}^{N}\operatorname{Res}(g,n) = 2\pi\mathrm{i}\sum_{n=-N}^{N}\frac{f(n)}{2\pi\mathrm{i}} = \sum_{n=-N}^{N} f(n).$$

Weiter gilt für den Grenzwert

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\square_N} g(\xi)\mathrm{d}\xi = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n).$$

Mit Aufgabenteil 2. folgt nun:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) &= \lim_{N\to\infty} \int_{\square_N} g(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[ \int_{\tau_{-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b,-N-\frac{1}{2}-\mathrm{i}b}} g(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_{\tau_{-N-\frac{1}{2}-\mathrm{i}b,N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b}} g(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_{\tau_{N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b,N+\frac{1}{2}+\mathrm{i}b}} g(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_{\tau_{N+\frac{1}{2}+\mathrm{i}b,-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b}} g(\xi)\mathrm{d}\xi \right] \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[ \int_{\tau_{-N-\frac{1}{2}-\mathrm{i}b,N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b}} g(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_{\tau_{N+\frac{1}{2}+\mathrm{i}b,-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b}} g(\xi)\mathrm{d}\xi \right].
\end{aligned}$$

4. Es gilt für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(x-\mathrm{i}b)}\right| &= \left|\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}\cdot \mathrm{e}^{2\pi b}\right| = \mathrm{e}^{2\pi b} > 1, \\
\left|\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(x+\mathrm{i}b)}\right| &= \left|\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}\cdot \mathrm{e}^{-2\pi b}\right| = \mathrm{e}^{-2\pi b} < 1.
\end{aligned}$$

So gilt mit unserer Vorbemerkung von oben

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) &= \lim_{N\to\infty} \left[ \int_{\tau_{-N-\frac{1}{2}-\mathrm{i}b,N+\frac{1}{2}-\mathrm{i}b}} g(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_{\tau_{N+\frac{1}{2}+\mathrm{i}b,-N-\frac{1}{2}+\mathrm{i}b}} g(\xi)\mathrm{d}\xi \right] \\
&= \int_{-\infty-\mathrm{i}b}^{\mathrm{i}b} g(z)\mathrm{d}z + \int_{\infty+\mathrm{i}b}^{\mathrm{i}b} g(z)\mathrm{d}z \\
&= \int_{-\infty-\mathrm{i}b}^{\mathrm{i}b} \frac{f(z)}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}-1}\mathrm{d}z - \int_{\mathrm{i}b}^{\infty+\mathrm{i}b} \frac{f(z)}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}-1}\mathrm{d}z \\
&= \int_{-\infty-\mathrm{i}b}^{\mathrm{i}b} f(z)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}(1-0)^n\left(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}-0\right)^{-(n+1)}\right)\mathrm{d}z - \int_{\mathrm{i}b}^{\infty+\mathrm{i}b} f(z)\cdot\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(1-0)^{-(n+1)}\left(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}-0\right)^{n}\right)\mathrm{d}z \\
&= \int_{-\infty-\mathrm{i}b}^{\mathrm{i}b} \sum_{n=0}^{\infty} f(z)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(n+1)\cdot z}\mathrm{d}z + \int_{\mathrm{i}b}^{\infty+\mathrm{i}b} \sum_{n=0}^{\infty} f(z)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}n\cdot z}\mathrm{d}z \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty-\mathrm{i}b}^{\mathrm{i}b} f(z)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(n+1)\cdot z}\mathrm{d}z + \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathrm{i}b}^{\infty+\mathrm{i}b} f(z)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(-n)\cdot z}\mathrm{d}z \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(n+1) + \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(-n) \\
&= \sum_{l=1}^{\infty}\widehat{f}(l) + \sum_{l=-\infty}^{0}\widehat{f}(l) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n).
\end{aligned}$$

Dies war gerade zu zeigen. □

## Aufgabe 3 ((T) Formeln für das Residuum)

Sei ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ gegeben.

1. Sei der Radius $r > 0$ und die Ordung $m \in \mathbb{N}$ gegeben. Ist die Funktion $f\colon B_r(z_0)\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph auf $B_r(z_0)\setminus\{z_0\}$ und hat die Funktion $f$ im Punkt $z_0$ einen Pol $m$-ter Ordnung, so zeigen Sie, dass dann für das Residuum der Funktion $f$ im Punkt $z_0$ folgende Formel gilt:

$$\operatorname{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left(f(z)\cdot(z-z_0)^m\right)\right).$$

Im Spezialfall $m = 1$ gilt somit für das Residuum von der Funktion $f$ im Punkt $z_0$

$$\operatorname{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)\cdot(z-z_0).$$

2. Seien $f, g$ in einer Umgebung um den Punkt $z_0$ holomorphe Funktionen und die Funktion $g$ habe eine einfache Nullstelle im Punkt $z_0$. Zeigen Sie, dass dann für das Residuum der Funktion $\frac{f}{g}$ im Punkt $z_0$ die folgende Formel gilt:
$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

## Aufgabe 4 ((Ü))

1. Zeigen Sie: Sind $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zwei ganze Funktionen mit $|f(z)| \leq |g(z)|$, so gibt es eine Zahl $c \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = c \cdot g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

2. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und setze die Funktion $g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $g$ eine wesentliche Singularität in der Null hat, genau dann, wenn $f$ kein Polynom ist.

3. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, die kein Polynom ist und $\omega \in \mathbb{C}$ ein Punkt. Zeigen Sie, dass es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ gibt mit $|z_n| \to \infty$ und $f(z_n) \to \omega$ für $n \to \infty$.

## Aufgabe 5 ((T) Integrale berechnen mit dem Residuensatz)

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes

$$\begin{array}{llll} (a) & \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x \text{ für } n \in \mathbb{N},\ n \text{ gerade}, & (b) & \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x \text{ für } n \in \mathbb{N},\ n \geq 3 \text{ ungerade}, \\ (c) & \displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\cos(z)}{1+z^2}\mathrm{d}z, & (d) & \displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1}\mathrm{d}z, \\ (e) & \displaystyle\int_{|z|=2} \exp\left(\frac{z}{1-z}\right)\mathrm{d}z, & (f) & \displaystyle\int_\gamma \frac{z}{\cosh(z)-1}\mathrm{d}z, \end{array}$$

wobei $\gamma$ die geschlossene Kurve ist, die den Rand des Gebietes
$$E := \left\{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}\colon y^2 < \left(4\pi^2 - 1\right) \cdot \left(1 - x^2\right)\right\} \subseteq \mathbb{C}$$
gegen den Uhrzeigersinn durchläuft.

**Lösung von Aufgabe 5**

$(a)$ Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gerade und setze die Funktion $f(z) := \frac{1}{1+z^n}$. So hat die Funktion $f$ als Pole von Ordnung Eins gerade die $n$-ten Einheitswurzeln, d.h.
$$\xi := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}} \in \mathbb{C} \text{ und } \xi^{2k-1} \text{ für } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \leq n.$$

Mit der in Aufgabe 3.2. hergeleiteten Formel für das Residuum gilt nun für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$
$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(f, \xi^{2k-1}\right) &= \left[\frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(1+z^n)}\right]_{z=\xi^{2k-1}} = \left[\frac{1}{n \cdot z^{n-1}}\right]_{z=\xi^{2k-1}} \\ &= \frac{1}{n \cdot (\xi^{2k-1})^{n-1}} = \frac{\xi^{2k-1}}{n \cdot (\xi^{2k-1})^n} = \frac{\xi^{2k-1}}{n \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n} \cdot n}} \\ &= \frac{\xi^{2k-1}}{n \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}} = -\frac{1}{n}\xi^{2k-1}. \end{aligned}$$

Sei der Radius $r > 0$. Wir bezeichnen mit $\gamma_r\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ die Kurve des Halbkreisbogens $\partial B_r(0) \cap \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ mit $\gamma(0) = r$ und $\gamma(1) = -r$, sowie $\tau_{-r,r}\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ die Verbindungsstrecke von $-r$ zu $r$ und $\eta_r := \tau_{-r,r} \oplus \gamma_r$. Sei $r > 2$, dann sind $\xi^{2k-1} \in B_r(0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Weiter ist $\xi^{2k-1} \in B_r(0) \cap \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im}(z) > 0\}$ genau dann, wenn $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq \frac{n}{2}$, und es ist $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$, da $n$ gerade ist. So gilt mit Hilfe des Residuensatzes und der geometrischen Summenformel
$$\int_{\eta_r} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \operatorname{Res}\left(f, \xi^{2k-1}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2}{n}\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \xi^{2k-1} = -\frac{2}{n}\pi\mathrm{i}\xi \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left(\xi^2\right)^k \\
&= -\frac{2}{n}\pi\mathrm{i}\xi \cdot \frac{1-\left(\xi^2\right)^{\frac{n}{2}-1+1}}{1-\xi^2} = -\frac{2}{n}\pi\mathrm{i}\xi \cdot \frac{1-\left(\xi^2\right)^{\frac{n}{2}}}{1-\xi^2} = -\frac{2}{n}\pi\mathrm{i}\xi \cdot \frac{1-\xi^n}{1-\xi^2} \\
&= -\frac{2}{n}\pi\mathrm{i} \cdot \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}\cdot n}}{\xi^{-1}-\xi} = -\frac{2}{n}\pi\mathrm{i} \cdot \frac{1-(-1)}{\xi^{-1}-\xi} = -\frac{4}{n}\pi\mathrm{i} \cdot \frac{1}{\xi^{-1}-\xi} \\
&= -\frac{4}{n}\pi\mathrm{i} \cdot \frac{1}{2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\left(\xi^{-1}\right)} = -\frac{2}{n}\pi \cdot \frac{1}{\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}\right)} \\
&= -\frac{2}{n}\pi \cdot \frac{1}{\sin\left(-\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{2}{n}\pi\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^{-1},
\end{aligned}$$

wobei wir am Ende die Eulersche Identität genutzt haben. Also ist

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^{r} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\tau_{-r,r}} f(z)\mathrm{d}z &= \int_{\eta_r} f(z)\mathrm{d}z - \int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z \\
&= \frac{2}{n}\pi\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^{-1} - \int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Andererseits gilt mit der Standardabschätzung

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z\right| &\le \pi r \cdot \sup_{\gamma_r([0,1])} |f(z)| \le \pi r \cdot \sup_{z\in\partial B_r(0)} |f(z)| = \pi r \cdot \sup_{z\in\partial B_r(0)} \left|\frac{1}{1+z^n}\right| \\
&= \pi r \cdot \sup_{z\in\partial B_r(0)} \frac{1}{|1+z^n|} \le \pi r \cdot \sup_{z\in\partial B_r(0)} \frac{1}{|z|^n} = \pi r \cdot \frac{1}{r^n} \\
&\le \pi r \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{\pi}{r} \to 0 \text{ für } r \to \infty.
\end{aligned}$$

Also erhalten wir im Grenzwert $r \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{r\to\infty} \left[\frac{2}{n}\pi\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^{-1} - \int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z\right] \\
&= \frac{2}{n}\pi\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Die Funktion $f$ ist auf $\mathbb{R}$ eine gerade Funktion, d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, da $n$ gerade ist, daher gilt nun

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\pi\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^{-1} = \frac{\pi}{n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^{-1}.$$

(*b*) Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 3$ ungerade. Setze die Funktion $f(z) := \frac{1}{1+z^n}$. So hat die Funktion $f$ als Pole von Ordnung Eins gerade die $n$-ten Einheitswurzeln, d.h.

$$\xi := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}} \in \mathbb{C} \text{ und } \xi^{2k-1} \text{ für } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \le n.$$

Mit der in Aufgabe 3.2. hergeleiteten Formel für das Residuum gilt nun für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \le n$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left(f, \xi^{2k-1}\right) &= \left[\frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(1+z^n\right)}\right]_{z=\xi^{2k-1}} = \left[\frac{1}{n\cdot z^{n-1}}\right]_{z=\xi^{2k-1}} \\
&= \frac{1}{n\cdot\left(\xi^{2k-1}\right)^{n-1}} = \frac{\xi^{2k-1}}{n\cdot\left(\xi^{2k-1}\right)^{n}} = \frac{\xi^{2k-1}}{n\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}\cdot n}} \\
&= \frac{\xi^{2k-1}}{n\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}} = -\frac{1}{n}\xi^{2k-1}.
\end{aligned}$$

Sei der Radius $r > 0$, so definiere die Kurve $\gamma_r(\varphi) := r\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ für $\varphi \in \left[0, \frac{2\pi}{n}\right]$ und setze $\eta_r := \tau_{0,r} \oplus \gamma_r \oplus \tau_{r\xi^2,0}$, da

$$\gamma_r\left(\frac{2\pi}{n}\right) = r\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}} = r\cdot\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}\right)^2 = r\cdot\xi^2$$

ist. Allerdings liegt von den Polen nur $\xi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}$ innerhalb der Kurve $\gamma_r$. Das Residuum der Funktion $f$ in $\xi$ lautet also

$$\mathrm{Res}\left(f, \xi\right) = -\frac{1}{n}\xi.$$

Für $r > 2$ gilt laut dem Residuensatz

$$\int_{\eta_r} \frac{1}{1+z^n}\mathrm{d}z = \int_{\eta_r} f(z)\mathrm{d}z = -\frac{2}{n}\pi\mathrm{i}\xi.$$

Wegen

$$\left(z\cdot\xi^2\right)^n = z^n\cdot\xi^{2n} = z^n\cdot\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}\right)^{2n} = z^n\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}\cdot 2n} = z^n\cdot\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = z^n\cdot 1 = z^n \text{ für alle } z\in\mathbb{C},$$

gilt per Definition und der Inversionsregel für Kurvenintegrale, dass

$$\begin{aligned}
\int_{\tau_{r\xi^2,0}} f(z)\mathrm{d}z &= \int_0^1 f\left(r\xi^2 + t\cdot\left(0-r\xi^2\right)\right)\cdot\left(0-r\xi^2\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 f\left((1-t)\cdot r\xi^2\right)\cdot\left(-r\xi^2\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+\left((1-t)\cdot r\xi^2\right)^n}\cdot\left(-r\xi^2\right)\mathrm{d}t\\
&= \xi^2\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1+\left[(1-t)r\right]^n}\cdot(-r)\mathrm{d}t = \xi^2\int_0^1 f\left((1-t)r\right)\cdot(-r)\mathrm{d}t\\
&= \xi^2\int_0^1 f\left(r+t\cdot(0-r)\right)\cdot(-r)\mathrm{d}t = \xi^2\int_{\tau_{r,0}} f(z)\mathrm{d}z\\
&= \xi^2\int_{\tau_{0,r}^{-1}} f(z)\mathrm{d}z = -\xi^2\int_{\tau_{0,r}} f(z)\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Für das Kurvenintegral über die Kurve $\gamma_r$ gilt nach der Standardabschätzung

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z &\leq L\left(\gamma_r\right)\cdot \sup_{z\in\gamma_r\left(\left[0,\frac{2\pi}{n}\right]\right)} |f(z)|\\
&\leq 2\pi r\cdot\sup_{z\in\partial B_r(0)}\left|\frac{1}{1+z^n}\right|\\
&\leq 2\pi r\cdot\sup_{z\in\partial B_r(0)}\frac{1}{|z|^n}\\
&= 2\pi r\cdot\frac{1}{r^n} \leq 2\pi r\cdot\frac{1}{r^3} = \frac{2\pi}{r^2} \to 0 \text{ für } r\to\infty.
\end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{n}\pi\mathrm{i}\xi = \lim_{r\to\infty} -\frac{2}{n}\pi\mathrm{i}\xi &= \lim_{r\to\infty}\int_{\eta_r} f(z)\mathrm{d}z\\
&= \lim_{r\to\infty}\left[\int_{\tau_{0,r}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\tau_{r\xi,0}} f(z)\mathrm{d}z\right]\\
&= \lim_{r\to\infty}\left[\int_{\tau_{0,r}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z - \xi^2\int_{\tau_{0,r}} f(z)\mathrm{d}z\right]\\
&= \lim_{r\to\infty}\left[\left(1-\xi^2\right)\cdot\int_0^r f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z\right]\\
&= \left(1-\xi^2\right)\cdot\int_0^\infty f(z)\mathrm{d}z = \left(1-\xi^2\right)\cdot\int_0^\infty\frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Das ergibt durch elementare Umformung

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x &= -\frac{2}{n}\pi\mathrm{i}\xi\cdot\frac{1}{1-\xi^2} = -\frac{2}{n}\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{\xi^{-1}-\xi}\\
&= -\frac{2}{n}\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\left(\xi^{-1}\right)} = -\frac{1}{n}\pi\cdot\frac{1}{\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}\right)}\\
&= -\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\sin\left(-\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{\pi}{n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

(*d*) Definiere die Funktion $f(z) := \frac{z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1}$. Der Nenner der Funktion $f$ wird nur dann null, wenn $z = 2k\pi$ ist für ein $k\in\mathbb{Z}$. Allerdings liegt nur $z=0$ im Inneren von $B_1(0)$ und daher ist nach dem Residuensatz, da die Null einmal durchlaufen wird,

$$\int_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\,(f,0)\,.$$

Allerdings gilt nun für $z \in B_2(0)$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1} = \frac{z}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\mathrm{i}z)^n - 1} = \frac{z}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(\mathrm{i}z)^n \frac{1}{1!}(\mathrm{i}z)^0 - 1} \\
&= \frac{z}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(\mathrm{i}z)^n + 1 - 1} = \frac{z}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(\mathrm{i}z)^n} \\
&= \frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n!} z^{n-1}} = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{k+1}}{(k+1)!} z^k} \\
&= \frac{1}{\frac{\mathrm{i}^{0+1}}{(0+1)!} z^0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{k+1}}{(k+1)!} z^k} = \frac{1}{\mathrm{i} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{k+1}}{(k+1)!} z^k},
\end{aligned}
$$

d.h. die Funktion $f$ lässt sich in $z=0$ holomorph fortsetzen, damit hat die Funktion $f$ in 0 eine hebbare Singularität und es gilt daher nach der Vorlesung, dass $\operatorname{Res}(f,0)=0$ ist. Für das Kurvenintegral folgt nun

$$
\int_{|z|=1} \frac{z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1} \mathrm{d}z = \int_{|z|=1} f(z) \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \operatorname{Res}(f,0) = 2\pi\mathrm{i} \cdot 0 = 0.
$$

$(f)$ Definiere die Funktion $f(z) := \frac{z}{\cosh(z)-1}$. Die Nullstellen des Nenners vom Ausdruck $f(z)$ berechnen wir über:

$$
\begin{aligned}
0 = \cosh(z) - 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}\right) = \cosh(z) = 1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = 2 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{2z} + 1 = 2\mathrm{e}^z \;\Leftrightarrow\; \left(\mathrm{e}^z\right)^2 - 2\mathrm{e}^z + 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\; \left(\mathrm{e}^z - 1\right)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; |\mathrm{e}^z - 1| = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^z - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^z = 1 = \mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}},\; k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; z = 2k\pi\mathrm{i},\; k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Der Rand von $E$ ist gerade

$$
\begin{aligned}
\partial E &= \left\{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \colon y^2 = \left(4\pi^2 - 1\right) \cdot \left(1 - x^2\right)\right\} \\
&= \left\{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \colon x^2 + \frac{y^2}{4\pi^2 - 1} = 1\right\}.
\end{aligned}
$$

Also ist $\partial E$ eine Ellipse um den Punkt 0 mit den Halbachsen 1 und $\sqrt{4\pi^2-1}$. Allerdings gilt $\sqrt{4\pi^2-1} < \sqrt{4\pi^2} = 2\pi$, daher wird nur die isolierte Singularität $z=0$ einmal gegen den Uhrzeigersinn von der Kurve $\gamma$ durchlaufen. Nach dem Residuensatz gilt nun

$$
\int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \operatorname{Res}(f,0).
$$

Für $z \in \overline{E}\backslash\{0\}$ können wir $f(z)$ schreiben als

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z}{\cosh(z)-1} = \frac{z}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} - 1} = \frac{z}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} + \frac{1}{(2\cdot 0)!} z^{2\cdot 0} - 1} \\
&= \frac{z}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} + 1 - 1} = \frac{z}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}} \\
&= \frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n-1}} = \frac{1}{z \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n-2}} \\
&= \frac{1}{z \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2(k+1))!} z^k} = \frac{\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2(k+1))!} z^k\right)^{-1}}{z}.
\end{aligned}
$$

So sehen wir, dass $z=0$ ein Pol erster Ordnung ist. Daher gilt für das Residuum von der Funktion $f$ an der Polstelle 0. dass

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,0) &= \lim_{z\to 0} f(z) \cdot (z-0) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2(k+1))!} z^k\right)^{-1}}{z} \\
&= \lim_{z\to 0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2(k+1))!} z^k\right)^{-1} = \lim_{z\to 0} \left(\frac{1}{2(0+1)!} z^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2(k+1))!} z^k\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2(k+1))!}z^k\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2.$$

Für das Kurvenintegral gilt dann schließlich

$$\int_\gamma \frac{z}{\cosh(z)-1}\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\,(f,0) = 2\pi\mathrm{i}\cdot 2 = 4\pi\mathrm{i}.$$

Dies war zu zeigen. □

## Aufgabe 6 ((T) Laurentreihen und Regeln von de l'Hospital)

1. Definiere die Funktion $f\colon \mathbb{C}\backslash\{-1,1,3\}\to\mathbb{C}$ durch

$$f(z) := \frac{1}{1-z^2}+\frac{1}{3-z}.$$

Bestimmen Sie die Laurentreihe der Funktion $f$ einmal im Kreisring

$$A := \{z\in\mathbb{C}\colon 1<|z|<3\} \text{ und einmal im Kreisring } B := \{z\in\mathbb{C}\colon 1<|z-2|<3\}.$$

2. Seien $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f,g\colon \Omega\to\mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen auf $\Omega$, die nicht konstant null sind. Weiter haben die Funktionen $f$ und $g$ im Punkt $z_0\in\Omega$ Nullstellen der Ordnung $n\in\mathbb{N}_0$ bzw. $m\in\mathbb{N}_0$. Wir bezeichnen mit $N(g)$ die Nullstellenmenge der Funktion $g$, d.h. also

$$N(g) := \{z\in\Omega\colon g(z)=0\}.$$

Dann setzen wir die Funktion $h\colon \Omega\backslash N(g)\to\mathbb{C}$ durch

$$h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}.$$

Zeigen Sie, dass falls $n\geq m$ ist, hat die Funktion $h$ im Punkt $z_0$ eine hebbare Singularität und kann so im Punkt $z_0$ durch

$$h(z_0) := \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(m)}(z_0)}{g^{(m)}(z_0)}$$

holomorph fortgesetzt werden.
Zeigen Sie weiter: Gilt andernfalls $n<m$, so hat die Funktion $h$ im Punkt $z_0$ einen Pol der Ordnung $m-n$.

**Lösung von Aufgabe 6**

1. Wir bestimmen erstmal die Laurentreihe von der Funktion $f$ im Kreisring $A$. Also für $z\in\mathbb{C}$ mit $1<|z|<3$ gilt mit geometrischer Reihe, da nach Voraussetzung $\left|z^{-2}\right|<1$ ist,

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1-z^2}+\frac{1}{3-z} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{z^{-2}-1}-\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-z^{-2}}-\frac{1}{z-3}\\
&= -\frac{1}{z^2}\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(z^{-2}\right)^k\right)-\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{z^2}\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2k}}\right)-\frac{1}{z-3}\\
&= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2k+2}}-\frac{1}{z-3}\\
&= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2(k+1)}}-\left(-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3-0)^{k+1}}(z-0)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)z^{-2(k+1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{k+1}}z^k\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n z^n
\end{aligned}$$

mit den Koeffizienten

$$a_n := \begin{cases} -1, \text{ falls } n<0 \text{ und } |n| \text{ gerade}\\ 0, \text{ falls } n<0 \text{ und } |n| \text{ ungerade}\\ \frac{1}{3^{n+1}}, \text{ falls } n\geq 0\end{cases}$$

für $n \in \mathbb{Z}$, wobei wir den ersten Fall unserer obigen Vorbemerkung ausgenutzt haben.
Nun zur Laurentreihe von der Funktion $f$ auf dem Kreisring $B$. Dazu führen wir eine Partialbruchzerlegung auf den ersten Summanden durch, d.h. für $z \in \mathbb{C}$ mit $-1 \neq z \neq 1$ gilt

$$\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{(1-z)\cdot(1+z)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z}\right).$$

Also können wir $f(z)$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\{-1,1,3\}$ schreiben als

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z}\right) - \frac{1}{z-3}.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-2| < 3$ gilt laut der obigen Bemerkung im ersten Fall, dass

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-(-1)} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-1-2)^{k+1}}(z-2)^k = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-3)^{k+1}}(z-2)^k = -\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}3^{-(k+1)}(z-2)^k$$

ist. Und für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-2| > 1$ folgt aus dem zweiten Teil der obigen Bemerkung, dass

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= \frac{-1}{z-1} = -\sum_{k=0}^{\infty}(1-2)^k(z-2)^{-(k+1)} = -\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-2)^{-(k+1)},\\
\frac{1}{z-3} &= \sum_{k=0}^{\infty}(3-2)^k(z-2)^{-(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}(z-2)^{-(k+1)}.
\end{aligned}$$

Nun erhalten wir insgesamt durch Einsetzen unserer Resultate für $z \in \mathbb{C}$ mit $1 < |z-2| < 3$, d.h. $z \in B$, die Darstellung

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2}\left(-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}3^{-(k+1)}(z-2)^k - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-2)^{-(k+1)}\right) - \sum_{k=0}^{\infty}(z-2)^{-(k+1)}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+2}3^{-(k+1)}(z-2)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(z-2)^{-(k+1)} - \sum_{k=0}^{\infty}(z-2)^{-(k+1)}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{k+1}}{2} - 1\right](z-2)^{-(k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2}3^{-(k+1)}(z-2)^k\\
&= \sum_{l=-\infty}^{-1}\left[\frac{(-1)^{-l}}{2} - 1\right](z-2)^l + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2}3^{-(k+1)}(z-2)^k\\
&= \sum_{l=-\infty}^{-1}\left[\frac{(-1)^{l}}{2} - 1\right](z-2)^l + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2}3^{-(k+1)}(z-2)^k\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-2)^n
\end{aligned}$$

mit Koeffizienten

$$b_n := \begin{cases} \frac{(-1)^n}{2} - 1, & \text{falls } n < 0\\ \frac{(-1)^n}{2}3^{-(n+1)}, & \text{falls } n \geq 0 \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{Z}$.

□