15.06.2016
Prof. Dr. Tobias Lamm
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Funktionentheorie

5. Übungsblatt

Setze $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und setze die Funktion

$$J\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}},\ z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{falls } z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ \infty, & \text{falls } z = 0 \\ 0, & \text{falls } z = \infty \end{cases} .$$

Weiter sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ offen und $f\colon \Omega \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine Funktion. Wir nennen die Funktion f holomorph auf Ω, genau dann, wenn f auf $\Omega\backslash\{\infty\}$ und $f \circ J$ auf $J(\Omega)\backslash\{\infty\}$ holomorph ist. Wir nennen die Funktion f meromorph auf Ω, genau dann, wenn eine Menge $P_f \subseteq \Omega$ existiert, die keine Häufungspunkte in Ω hat und f auf $\Omega\backslash P_f$ holomorph ist, sowie jedes $z \in P_f$ ist eine Polstelle von f. Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}(\Omega)$ die Menge der meromorphen Funktionen auf Ω.

Aufgabe 1 ((Ü) Folgerung mit dem Lemma von Schwarz)

Sei $\varphi\colon B_1(0) \to B_1(0)$ biholomorph. Zeigen Sie, dass φ eine gebrochen lineare Abbildung ist.

Aufgabe 2 ((Ü) Die drei Liouvilleschen Sätze zu elliptischen Funktionen)

Wir nennen eine meromorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ elliptisch, falls es über $\mathbb{R}$ linear unabhängige $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$f(z + \omega_1) = f(z) = f(z + \omega_2) \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Das Paar (ω_1, ω_2) heißt das Erzeugendensystem des Gitters $\Gamma := \{k\omega_1 + l\omega_2 \colon k, l \in \mathbb{Z}\}$ und wir nennen das Parallelogramm $P := \{t\omega_1 + s\omega_2 \colon 0 \le t, s < 1\}$ den Fundamentalbereich.

1. Zeigen Sie den ersten Liouvilleschen Satz: Ist $f\colon \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine elliptische holomorphe Funktion, so muss die Funktion f konstant sein auf $\mathbb{C}$.

2. Zeigen Sie den zweiten Liouvilleschen Satz: Ist $f\colon \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine elliptische Funktion mit Polstellen $p_1, \dots, p_k \in P$, $k \in \mathbb{N}$, dann gilt für die Summe der Residuen:

$$\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f, p_j) = 0.$$

3. Folgern Sie daraus: Hat die elliptische Funktion f in P nur einen einfachen Pol, so ist die Funktion f schon konstant auf $\mathbb{C}$.

4. Zeigen Sie den dritten Liouvilleschen Satz: Ist f eine nicht-konstante elliptische Funktion, so nimmt diese in P (unter Berücksichtigung der Vielfachheiten) jeden Wert aus $\widehat{\mathbb{C}}$ gleich oft an.

Aufgabe 3 ((T) Meromorphe Funktionen)

Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet.

1. Definieren Sie eine Addition $+$ und eine Multiplikation $\cdot$ auf der Menge $\mathcal{M}(\Omega)$, damit das Tripel $(\mathcal{M}(\Omega), +, \cdot)$ ein Körper ist.

2. Zeigen Sie: Ist $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, dann ist die Funktion f konstant auf $\widehat{\mathbb{C}}$.

3. Zeigen Sie: Ist $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion, dann ist die Funktion f eine rationale Funktion.

Aufgabe 4 ((T))

Sei $a \in B_1(0)$ ein beliebiger Punkt und $\varphi \in [0, 2\pi]$ ein beliebiger Winkel. Setze die Funktion $f\colon \overline{B_1(0)} \to \mathbb{C}$ durch

$$f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

1. Zeigen Sie, dass $f\left(B_1(0)\right) \subseteq B_1(0)$ und $f\left(\partial B_1(0)\right) \subseteq \partial B_1(0)$ ist.

2. Gilt der Zusammenhang $\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 1 - |a|^2$, dann hat die Funktion f einen Fixpunkt mit Betrag gleich Eins, andernfalls gibt es zwei Fixpunkte z_1 und z_2 mit $|z_1 \cdot z_2| = 1$.

3. Setze $\omega := \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\varphi}{2}} \frac{\overline{a}z-1}{\sqrt{1-|a|^2}}$. Zeigen Sie die Identität in einem Fixpunkt z von f:

$$\omega^2 + \frac{2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{1-|a|^2}}\omega + 1 = 0.$$

4. Zeigen Sie: Für Fixpunkte $z \in B_1(0)$ gilt $|f'(z)| = 1$ und für Fixpunkte $z \in \partial B_1(0)$ gilt $f'(z) \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5 ((T) Stereographische Projektion)

Betrachte die $S^2 := \left\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon\ |x|^2 := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Die stereographische Projektion vom Südpol ist

$$\varphi_+\colon S^2 \to \widehat{\mathbb{C}},\ x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1 + \mathrm{i}x_2}{1+x_3}, \text{ falls } x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,-1)\} \\ \infty, \text{ falls } x = (0,0,-1) \end{cases}.$$

1. Berechnen Sie φ_+^{-1} und zeigen Sie die Stetigkeit der Funktionen φ_+ und φ_+^{-1}.

2. Folgern Sie daraus: Die Menge $\widehat{\mathbb{C}}$ ist kompakt.

Aufgabe 6 ((T))

Definiere die gebrochen lineare Abbildung φ durch

$$\varphi(z) := \begin{cases} \frac{1-z}{1+z}, \text{ für } z \in \mathbb{C} \backslash \{-1\} \\ -1, \text{ für } z = \infty \\ \infty, \text{ für } z = -1 \end{cases}.$$

Zeigen Sie: φ bildet biholomorph den Ball $B_1(0)$ auf die rechte Halbebene $\{z \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$, sowie die rechte Halbebene biholomorph auf den Ball $B_1(0)$ ab und $\varphi(0) = 1,\ \varphi(1) = 0$.