15.06.2016
Prof. Dr. Tobias Lamm
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Funktionentheorie

5. Übungsblatt

Setze $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und setze die Funktion

$$J\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}},\ z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{falls } z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ \infty, & \text{falls } z = 0 \\ 0, & \text{falls } z = \infty \end{cases} .$$

Weiter sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ offen und $f\colon \Omega \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine Funktion. Wir nennen die Funktion f holomorph auf Ω, genau dann, wenn f auf $\Omega\backslash\{\infty\}$ und $f \circ J$ auf $J(\Omega)\backslash\{\infty\}$ holomorph ist. Wir nennen die Funktion f meromorph auf Ω, genau dann, wenn eine Menge $P_f \subseteq \Omega$ existiert, die keine Häufungspunkte in Ω hat und f auf $\Omega\backslash P_f$ holomorph ist, sowie jedes $z \in P_f$ ist eine Polstelle von f. Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}(\Omega)$ die Menge der meromorphen Funktionen auf Ω.

Aufgabe 1 ((Ü) Folgerung mit dem Lemma von Schwarz)

Sei $\varphi\colon B_1(0) \to B_1(0)$ biholomorph. Zeigen Sie, dass φ eine gebrochen lineare Abbildung ist.

Aufgabe 2 ((Ü) Die drei Liouvilleschen Sätze zu elliptischen Funktionen)

Wir nennen eine meromorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ elliptisch, falls es über $\mathbb{R}$ linear unabhängige $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$f(z + \omega_1) = f(z) = f(z + \omega_2) \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Das Paar (ω_1, ω_2) heißt das Erzeugendensystem des Gitters $\Gamma := \{k\omega_1 + l\omega_2 \colon k, l \in \mathbb{Z}\}$ und wir nennen das Parallelogramm $P := \{t\omega_1 + s\omega_2 \colon 0 \leq t, s < 1\}$ den Fundamentalbereich.

1. Zeigen Sie den ersten Liouvilleschen Satz: Ist $f\colon \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine elliptische holomorphe Funktion, so muss die Funktion f konstant sein auf $\mathbb{C}$.

2. Zeigen Sie den zweiten Liouvilleschen Satz: Ist $f\colon \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine elliptische Funktion mit Polstellen $p_1, \dots, p_k \in P$, $k \in \mathbb{N}$, dann gilt für die Summe der Residuen:
$$\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f, p_j) = 0.$$

3. Folgern Sie daraus: Hat die elliptische Funktion f in P nur einen einfachen Pol, so ist die Funktion f schon konstant auf $\mathbb{C}$.

4. Zeigen Sie den dritten Liouvilleschen Satz: Ist f eine nicht-konstante elliptische Funktion, so nimmt diese in P (unter Berücksichtigung der Vielfachheiten) jeden Wert aus $\widehat{\mathbb{C}}$ gleich oft an.

Lösung von Aufgabe 2

3. Sei $p \in P$ der einfach Pol der Funktion f, dann existiert eine Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-p)^n$$

mit Koeffizienten $c_{-n} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$, d.h.

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} c_n (z-p)^n.$$

Weiter ist $c_{-1} = \operatorname{Res}(f, p) = 0$ laut dem zweiten Liouvilleschen Satz bzw. Aufgabenteil 2., demnach ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-p)^n.$$

Dies ist überall holomorph (auch in p), also war der Pol p in Wahrheit in hebbarer Pol und der erste Liouvillesche Satz bzw. Aufgabenteil 1. ergibt nun, dass die Funktion f konstant ist auf $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3 ((T) Meromorphe Funktionen)

Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet.

1. Definieren Sie eine Addition $+$ und eine Multiplikation $\cdot$ auf der Menge $\mathcal{M}(\Omega)$, damit das Tripel $(\mathcal{M}(\Omega), +, \cdot)$ ein Körper ist.

2. Zeigen Sie: Ist $f \colon \widehat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, dann ist die Funktion f konstant auf $\widehat{\mathbb{C}}$.

3. Zeigen Sie: Ist $f \colon \widehat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion, dann ist die Funktion f eine rationale Funktion.

Aufgabe 4 ((T))

Sei $a \in B_1(0)$ ein beliebiger Punkt und $\varphi \in [0, 2\pi]$ ein beliebiger Winkel. Setze die Funktion $f \colon \overline{B_1(0)} \to \mathbb{C}$ durch

$$f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

1. Zeigen Sie, dass $f(B_1(0)) \subseteq B_1(0)$ und $f(\partial B_1(0)) \subseteq \partial B_1(0)$ ist.

2. Gilt der Zusammenhang $\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 1 - |a|^2$, dann hat die Funktion f einen Fixpunkt mit Betrag gleich Eins, andernfalls gibt es zwei Fixpunkte z_1 und z_2 mit $|z_1 \cdot z_2| = 1$.

3. Setze $\omega := \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\varphi}{2}} \frac{\overline{a}z-1}{\sqrt{1-|a|^2}}$. Zeigen Sie die Identität in einem Fixpunkt z von f:

$$\omega^2 + \frac{2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{1-|a|^2}}\omega + 1 = 0.$$

4. Zeigen Sie: Für Fixpunkte $z \in B_1(0)$ gilt $|f'(z)| = 1$ und für Fixpunkte $z \in \partial B_1(0)$ gilt $f'(z) \in \mathbb{R}$.

Lösung von Aufgabe 4

2. und 3.: Fall 1.: Sei $a = 0$. Dann ist $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} z$ für $z \in \overline{B_1(0)}$, so ist $z = 0$ stets ein Fixpunkt für jeden Winkel $\varphi \in [0, 2\pi]$. Ist hingegen $z \neq 0$ ein Fixpunkt, so muss

$$z = f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} z \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = 1 \;\Leftrightarrow\; \varphi \in \{0, 2\pi\}$$

gelten. In beiden Fällen ist $f = \mathrm{Id}_{\overline{B_1(0)}}$ und jeder Punkt aus $\overline{B_1(0)}$ ist dann ein Fixpunkt und

$$\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 1 - 0 = 1$$

gilt im Falle $\varphi = 0$. Weiter ist dann $\omega = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}$, d.h.

$$\begin{aligned}
\omega^2 + \frac{2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{1-|a|^2}}\omega + 1 &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} - 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} + 1 \\
&= \cos(\varphi) - \mathrm{i}\sin(\varphi) - 2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 1 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

laut den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus.
Fall 2.: Sei $a \in B_1(0)\backslash\{0\}$. Dann liefert die Fixpunktgleichung $f(z) = z$ gerade

$$\overline{a}z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\frac{\overline{a}z - |a|^2}{1-\overline{a}z}.$$

Ersetzen wir nun $v = \overline{a}z$ so bekommen wir die Gleichung

$$\begin{aligned} v &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\frac{v-|a|^2}{1-v} \\ \Leftrightarrow\ &-\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)v + v^2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|a|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow\ v_{1,2} = \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^2}{4} + \frac{4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|a|^2}{4}}, \end{aligned}$$

laut der Mitternachtsformel. Es gibt nur einen Fixpunkt genau dann, wenn folgende Gleichung gilt:

$$\begin{aligned} &\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^2 + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|a|^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi} - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = -4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|a|^2 \\ \Leftrightarrow\ &-4|a|^2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - 2 = \cos(\varphi) - \mathrm{i}\sin(\varphi) + \cos(\varphi) - \mathrm{i}\sin(\varphi) - 2 = 2\cos(\varphi) - 2 \\ &= 2\left(\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) - 2 = 2\left(\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \left(1-\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\right) - 2 \\ &= 4\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 4 \\ \Leftrightarrow\ &\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 1 - |a|^2, \end{aligned}$$

laut den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus, sowie dem trigonometrischen Pythagoras. Also löst nun in diesem Fall $z = \frac{v}{\overline{a}} = \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{2\overline{a}}$ die Fixpunktgleichung eindeutig und es ist

$$|z|^2 = \frac{\left|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right|^2}{4|a|^2} = \frac{4|a|^2}{4|a|^2} = 1$$

nach obiger Rechnung.
Rest kommt noch.

Aufgabe 5 ((T) Stereographische Projektion)

Betrachte die $S^2 := \left\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon\ |x|^2 := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Die stereographische Projektion vom Südpol ist

$$\varphi_+ \colon S^2 \to \widehat{\mathbb{C}},\ x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1 + \mathrm{i}x_2}{1+x_3}, \text{ falls } x \in \mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,-1)\} \\ \infty, \text{ falls } x = (0,0,-1) \end{cases}.$$

1. Berechnen Sie φ_+^{-1} und zeigen Sie die Stetigkeit der Funktionen φ_+ und φ_+^{-1}.

2. Folgern Sie daraus: Die Menge $\widehat{\mathbb{C}}$ ist kompakt.

Aufgabe 6 ((T))

Definiere die gebrochen lineare Abbildung φ durch

$$\varphi(z) := \begin{cases} \frac{1-z}{1+z}, \text{ für } z \in \mathbb{C}\backslash\{-1\} \\ -1, \text{ für } z = \infty \\ \infty, \text{ für } z = -1 \end{cases}.$$

Zeigen Sie: φ bildet biholomorph den Ball $B_1(0)$ auf die rechte Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \colon\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$, sowie die rechte Halbebene biholomorph auf den Ball $B_1(0)$ ab und $\varphi(0) = 1,\ \varphi(1) = 0$.

Lösung von Aufgabe 6

Es ist für $z \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}$

$$\varphi(z) = \frac{1-z}{1+z} = \frac{(1-z)\,(1+\overline{z})}{(1+z)\,(1+\overline{z})} = \frac{1-z+\overline{z}-|z|^2}{|1+z|^2} = \frac{1-|z|^2-2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}{|1+z|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1+z|^2} + \mathrm{i}\frac{-2\,\mathrm{Im}(z)}{|1+z|^2}.$$

Also gilt für $z \in B_1(0)$:

$$\mathrm{Re}\,(\varphi(z)) = \frac{1-|z|^2}{|1+z|^2} > 0,$$

daher liegt $\varphi(z)$ in der rechten Halbebene, bzw.

$$\varphi\,(B_1(0)) \subseteq \{z \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{Re}(z) > 0\}\,.$$

Andererseits ist $\varphi^{-1} = \varphi$, d.h. selbstinvers laut Vorlesung und die imaginäre Achse $\mathrm{i}\mathbb{R}$ ist gegeben durch die Punkte $(0, -\mathrm{i}, \infty)$ und die imaginäre Achse $\mathrm{i}\mathbb{R}$ berandet die rechte Halbebene. Weiter gilt in den Punkten:

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= \frac{1-0}{1+0} = \frac{1}{1} = 1,\\
\varphi(-\mathrm{i}) &= \frac{1-(-\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})\cdot(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})\cdot(1+\mathrm{i})} = \frac{1+\mathrm{i}+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1-\mathrm{i}^2} = \frac{1+(-1)+2\mathrm{i}}{1-(-1)} = \frac{2\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i},\\
\varphi(\infty) &= -1.
\end{aligned}$$

Aber die Punkte $(\varphi(0), \varphi(-\mathrm{i}), \varphi(\infty)) = (1, \mathrm{i}, -1)$ ergeben den Rand der Einheitskreisscheibe $B_1(0)$, d.h. für das Bild:

$$\varphi\,(\{z \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{Re}(z) > 0\}) \subseteq \widehat{\mathbb{C}}\backslash B_1(0).$$

Da die rechte Halbebene wegzusammenhängend ist, muss auch $\varphi\,(\{z \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{Re}(z) > 0\})$ wegzusammenhängend sein, weiter ist

$$\varphi(1) = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

und daher muss

$$\varphi\,(\{z \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{Re}(z) > 0\}) \subseteq B_1(0)$$

sein. Dies zeigt, dass die offene Einheitskreisscheibe $B_1(0)$ biholomorph zur rechten Halbebene über die Abbildung φ ist und umgekehrt (ebenfalls über φ). Dies war zu zeigen. $\square$