29.06.2016
Prof. Dr. Tobias Lamm
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Funktionentheorie

6. Übungsblatt

Aufgabe 1 ((Ü) Drei Konvergenzsätze)

1. (Montelsches Konvergenzkriterium) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{O}(D)$ eine in D lokal-beschränkte Funktionenfolge. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt gegen eine Funktion $f \in \mathcal{O}(D)$ konvergiert, falls jede in D kompakt konvergente Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f konvergiert.

2. (Satz von Vitali) Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$, weiter sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{O}(D)$ eine in D lokal-beschränkte Funktionenfolge. Weiter habe die Menge
$$K := \left\{ w \in \Omega \colon \lim_{n\to\infty} f_n(w) \text{ existiert in } \mathbb{C} \right\}$$
der Konvergenzpunkte der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wenigstens einen Häufungspunkt in Ω. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt in Ω konvergiert.

3. (Konvergenzsatz von Blaschke) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{O}(B_1(0))$ eine in $B_1(0)$ beschränkte Funktionenfolge. Weiter nehmen wir an, dass es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_1(0)$ gibt mit $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) = \infty$ so, dass für jeden Index $k \in \mathbb{N}$ der Limes $\lim_{n\to\infty} f_n(a_k)$ existiert. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt in $B_1(0)$ konvergiert.

Aufgabe 2 ((Ü) Kleine Bemerkung zur stetigen Konvergenz)

Sei $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{C}$ und $f_n \colon X \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, Funktionen. Zeigen Sie: Ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetig konvergent iin X, so existiert eine eindeutige Funktion $f \colon X \to \mathbb{C}$ so, dass aus $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ mit $x_n \to a \in X$ für $n \to \infty$ folgt $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(a)$.

Aufgabe 3 ((Ü) Satz von Osgood)

1. Sei $\mathcal{F} \subseteq C(D, \mathbb{C})$ eine Familie von stetigen Funktionen und diese sei punktweise in D beschränkt. Zeigen Sie, dass eine nicht-leere offene Menge $\widetilde{D} \subseteq D$ existiert so, dass die auf $\widetilde{D}$ eingeschränkte Familie
$$\widetilde{F} = \{ f|_{\widetilde{D}} \colon f \in \mathcal{F} \}$$
in $\widetilde{D}$ lokal-beschränkt ist.

2. Zeigen Sie den Satz von Osgood: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{O}(D)$ eine punktweise konvergente Funktionenfolge mit Grenzfunktion $f \colon D \to \mathbb{C}$. Dann gibt es eine nicht-leere offene Menge $\widetilde{D} \subseteq D$ die dicht liegt in D und die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt in $\widetilde{D}$ gegen f konvergiert. Insbesondere ist die Funktion dann auf $\widetilde{D}$ holomorph. (Hinweis: Nutzen Sie den ersten Teil und Aufgabe 4.(2) vom zweiten Übungsblatt)

Aufgabe 4 ((T) Normale Familien/ Allgemeine Satz von Montel)

Wir nennen eine Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(D)$ normal, wenn jede Funktionenfolge aus $\mathcal{F}$ eine Teilfolge besitzt, die in D kompakt konvergiert.

1. Zeigen Sie: Jede in D normale Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(D)$ ist lokal-beschränkt in D.

2. Zeigen Sie: Jede in D lokal-beschränkte Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(D)$ ist normal in D.

3. Zeien Sie: Ist $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(D)$ eine normale Familie in D, so ist auch jede Familie

$$\mathcal{F}^{(k)} := \left\{ f^{(k)} \colon f \in \mathcal{F} \right\}, \ k \in \mathbb{N},$$

normal in D.

Aufgabe 5 ((T) Ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz)

Zeigen Sie, folgende zwei Sätze:

1. (Eindeutigkeitssatz) Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, weiter seien $h_1, h_2 \colon \Omega \to B_1(0)$ zwei biholomorphe Abbildungen. Angenommen es gebe einen Punkt $z_0 \in \Omega$ mit $h(z_0) = h_2(z_0)$ und $\frac{h_1'(z_0)}{h_2'(z_0)} > 0$, dann gilt schon $h_1 = h_2$ auf Ω.

2. (Existenz- und Eindeutigkeitssatz) Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so existiert zu jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ genau eine biholomorphe Abbildung $h \colon \Omega \to B_1(0)$ mit $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) > 0$.

Aufgabe 6 ((T) Eine kleine Anwendung des Riemannschen Abbildungssatzes)

Definiere die Menge

$$U := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \colon |x| \geq 1\} \subseteq \mathbb{C}.$$

Gibt es dann eine ganze Funktion $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ so, dass $f(\mathbb{C}) = U$ ist?

Aufgabe 7 ((T))

Sind $B_1(0)$ und $\mathbb{C}$ zueinander diffeomorph, d.h. gibt es eine reell stetig differenzierbare bijektive Abbildung $\varphi \colon B_1(0) \to \mathbb{C}$ so, dass die Umkehrabbildung φ^{-1} auch reell stetig differenzierbar ist? Die Abbildung φ heißt dann Diffeomorphismus. Gibt es einen holomorphen Diffeomorphismus $\varphi \colon B_1(0) \to \mathbb{C}$?