Beweis von Lemma IV.13: (1) Es ist für $z \in \mathbb{C}$:

$$0 = \sin(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 1\right)$$
$$\Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} = 1$$
$$\Leftrightarrow\ 2\mathrm{i}z = 2\pi k \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow\ z = \pi k \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Also gilt laut dem Additionstheorem:

$$\cos(\pi a) = \cos(\pi b) \ \Leftrightarrow\ 0 = \cos(\pi a) - \cos(\pi b) = -2\sin\left[\frac{\pi}{2}(a+b)\right]\cdot\sin\left[\frac{\pi}{2}(a-b)\right]$$
$$\Leftrightarrow\ \sin\left[\frac{\pi}{2}(a+b)\right] = 0 \text{ oder } \sin\left[\frac{\pi}{2}(a-b)\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{\pi}{2}(a+b) = \pi k \text{ oder } \frac{\pi}{2}(a-b) = \pi k \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow\ b = -a + 2\pi k \text{ oder } b = a + 2(-k)\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow\ b = \pm a + 2\pi n \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}.$$

Dies ist gerade Aussage (1).
(2) Es gilt für alle $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}y},$$

also ist $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Nun gilt nach der Mitternachtsformel für ein $v \in \mathbb{C}$:

$$w = \cos(\pi v) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi v} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi v}\right) \ \Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi v} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi v} = 2w$$
$$\Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi v} - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi v}w + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ \widetilde{v}^2 - 2w\widetilde{v} + 1 = 0 \text{ mit } \widetilde{v} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi v}$$
$$\Leftrightarrow\ \widetilde{v}_{1,2} = \frac{2w \pm \sqrt{4w^2 - 4}}{2} = w \pm \sqrt{w^2 - 1} \text{ mit } \widetilde{v} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi v}$$
$$\Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi v} = w \pm \sqrt{w^2 - 1} \neq 0,$$

demnach existiert eine Lösung $v \in \mathbb{C}$ mit $\cos(\pi v) = w$. Weiter ist für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $v = a + \mathrm{i}b$ mit der Euler-Formel:

$$\begin{aligned}
\cos(\pi v) &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(a+\mathrm{i}b)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi(a+\mathrm{i}b)}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-\pi b}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi a} + \mathrm{e}^{\pi b}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi a}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-\pi b}\cdot(\cos(\pi a) + \mathrm{i}\sin(\pi a)) + \mathrm{e}^{\pi b}\cdot(\cos(\pi a) - \mathrm{i}\sin(\pi a))\right)\\
&= \cos(\pi a)\cdot\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-\pi b} + \mathrm{e}^{\pi b}\right) - \mathrm{i}\sin(\pi a)\cdot\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi b} - \mathrm{e}^{\pi b}\right)\\
&= \cos(\pi a)\cdot\cosh(\pi b) - \mathrm{i}\sin(\pi a)\cdot\sinh(\pi b).
\end{aligned}$$

Wegen $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und dem trigonometrischen Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned}
|w|^2 = |\cos(\pi v)|^2 &= \cos^2(\pi a)\cdot\cosh^2(\pi b) + \sin^2(\pi a)\cdot\sinh^2(\pi b)\\
&= \cos^2(\pi a)\cdot\left(1 + \sinh^2(\pi b)\right) + \sin^2(\pi a)\cdot\sinh^2(\pi b)\\
&= \cos^2(\pi a) + \left(\cos^2(\pi a) + \sin^2(\pi a)\right)\cdot\sinh^2(\pi b)\\
&= \cos^2(\pi a) + \sinh^2(\pi b).
\end{aligned}$$

Wegen der 2π-Periodizität der Cosinus-Funktion können wir o.B.d.A. annehmen, dass $|a| \leq 1$ ist. Dann folgt die Abschätzung durch $x^2 \leq \sinh^2(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, denn es ist

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{1 + \frac{\pi^2 b}{\pi^2}} \leq \sqrt{1 + \frac{\sinh^2(\pi b)}{\pi^2}}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{|w|^2 - \cos^2(\pi a)}{\pi^2}} \leq \sqrt{1 + \frac{|w|^2}{\pi^2}}$$
$$\leq \sqrt{1} + \sqrt{\frac{|w|^2 - \cos^2(\pi a)}{\pi^2}} = 1 + \frac{|w|}{\pi} \leq 1 + |w|$$

nach der Dreiecks-Ungleichung für die Quadratwurzel. Dies zeigt Aussage (2). $\square$

Beweis von Satz IV.16: Nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß ist die Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.
Annahme: Die Funktion f ist nicht konstant null auf Ω. So gibt es einen Radius $r > 0$ mit $\overline{B_r(c)} \subseteq \Omega$ und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \overline{B_r(c)} \backslash \{c\}$ laut dem Identitätssatz. Wegen der kompakten Konvergenz der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert dei Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f auf $\partial B_r(c)$, also ist die Zahlenfolge $(\min\{|f_n(z)| : z \in \partial B_r(c)\})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$ konvergent und daher insbesondere beschränkt nach unten durch eine Zahl $\varepsilon > 0$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(c) = f(c) = 0$ finden wir einen Index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(c)| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_\varepsilon$. Also folgt für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_\varepsilon$:

$$|f_n(c)| < \varepsilon \leq \min\{|f_n(z)| : z \in \partial B_r(c)\}.$$

Laut dem Minimumsprinzip ist dies ein Widerspruch, denn nach diesem gelte

$$\min\{|f_n(z)| : z \in \partial B_r(c)\} \leq |f_n(c)| < \varepsilon \leq \min\{|f_n(z)| : z \in \partial B_r(c)\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_\varepsilon$. Also ist die Funktion f konstant null auf Ω. Dies war zu zeigen. $\square$

Beweis von Satz IV.15: (1) Wähle $t > 0$ mit $\overline{B_{2t}(w)} \subseteq \Omega$. Setze für $f \in \mathcal{F}_*$ die Funktion $\widetilde{f} := f(2t \cdot +w)$ auf $B_1(0)$, so ist $\widetilde{f}(0) = f(w)$ für alle $f \in \mathcal{F}_*$. Definiere

$$\widetilde{\mathcal{F}}_* := \left\{\widetilde{f} \colon f \in \mathcal{F}_*\right\}.$$

Dann gilt nach dem Satz von Schottky, Satz IV.12:

$$\sup\left\{\|f\|_{L^\infty(B_t(w))} : f\ (f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}_*\right\} = \sup\left\{\|g\|_{L^\infty\left(B_{\frac{1}{2}}(0)\right)} : g \in \widetilde{\mathcal{F}}_*\right\} \leq L\left(\frac{1}{2}, r\right) < \infty,$$

d.h. $\mathcal{F}_*$ ist auf $B_t(w)$ beschränkt. Dies ist gerade die Aussage (1).
(2) Setze $U := \{w \in \Omega \colon \mathcal{F}_1 \text{ ist beschränkt um } w\}$. So ist per Definition U offen und $p \in U$, also $U \neq \emptyset$. Wäre nun $U \neq \Omega$, dann gibt es einen Punkt $w \in \partial U \cap \Omega$ und eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}_1$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(w)| = \infty$. Setze $g_n := \frac{1}{f_n} \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, und $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(w) = 0$, so ist nach Teil (1) die Familie $\{g_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt um w. Nach dem Satz von Montel, Satz III.12, gibt es eine Teilfolge $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Kreisscheibe B um w mit $\overline{B} \subseteq \Omega$ so, dass $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $g \in \mathcal{O}(B)$ auf B konvergiert. Alle Funktionen g_n, $n \in \mathbb{N}$, sind nullstellenfrei und $g(w) = 0$, also folgt nach dem Satz von Hurwitz, Satz IV.16, dass $g \equiv 0$ auf B. Da aber $B \cap U \neq \emptyset$ ist, existiert ein $z \in B \cap U$ mit

$$f_{n_k}(z) = g_{n_k}(z)^{-1} \to \infty \text{ für } k \to \infty,$$

was ein Widerspruch zur Beschränktheit um z ist. Also ist $\mathcal{F}_1$ lokal-beschränkt in Ω. Dies war zu zeigen. $\square$

Beweis von Satz IV.17: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$. Hat $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so ist die Folge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ nach Satz IV.15(2) lokal-beschränkt in Ω und nach dem Satz von Montel, Satz III.12, gibt es eine kompakt konvergente Teilfolge von $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, also insbesondere von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Hat $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nur endlich viele Folgenglieder in $\mathcal{F}_1$, so liegen fast alle Folgenglieder von $\left(\frac{1}{f_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}_1$, d.h. die Folge $\left(\frac{1}{f_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist lokal-beschränkt in Ω nach dem Satz IV.15(2). Wähle also laut dem Satz von Montel, Satz III.12, eine kompakt konvergente Teilfolge $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $\left(\frac{1}{f_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzfunktion $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ aus. Ist die Funktion g nullstellenfrei, dann konvergiert auch die Folge $\left(\frac{1}{g_{n_k}}\right)_{k\in\mathbb{N}} = (f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ kompakt gegen $\frac{1}{g} =: f$ auf Ω. Hat hingegen die Funktion g eine Nullstelle in Ω, so folgt nach dem Satz von Hurwitz, Satz IV.16, dass $g \equiv 0$ ist auf Ω und daher konvergiert die Folge $\left(\frac{1}{g_{n_k}}\right)_{k\in\mathbb{N}} = (f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ kompakt gegen ∞. Also hat $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stets eine kompakt konvergente Teilfolge auf Ω, d.h. $\mathcal{F}$ ist normal in Ω. Dies war zu zeigen. □

Anmerkung: Mir ist bei der Formulierung des großen Satzes von Picard ein Fehler unterlaufen auf den ich nach der Vorlesung hingewiesen wurde, daher hier die korrekte Formulierung.

Satz IV.18 (Der große Satz von Picard)
Sei $c \in \mathbb{C}$ eine isolierte wesentliche Singularität der Funktion f, die holomorph ist in einer Umgebung um c ausgenommen vom Punkt c. Dann nimmt die Funktion f in jeder Umgebung von c jede komplexe Zahl mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft als Wert an.

Beweis von Satz IV.18: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine Umgebung um c und seien $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, zwei Punkte die die Funktion f nicht als Werte annimmt. Wegen Skalierung nehmen wir o.B.d.A. an, dass $f \in \mathcal{O}\left(B_1(0)\backslash\{0\}\right)$ und $0, 1 \notin f\left(B_1(0)\backslash\{0\}\right)$ ist, d.h. $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$ und $U = B_1(0)$. Wir zeigen, dass nun f oder $\frac{1}{f}$ beschränkt ist um die Null. Dann muss aber 0 entweder eine hebbare Singularität oder aber ein Pol sein, was ein Widerspruch dazu ist, dass 0 eine wesentliche Singularität ist. Damit folgt dann durch iteratives Anwenden des Gezeigten auf immer kleinere Umgebungen (z.B. $\frac{1}{2}U$) die Behauptung. Setze die Folge $f_n(z) := f\left(\frac{z}{n}\right) \in \mathcal{O}\left(B_1(0)\backslash\{0\}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Laut der verschärften Version des Satzes von Montel, Satz IV.17, gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ oder $\left(\frac{1}{f_{n_k}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist auf $\partial B_{\frac{1}{2}}(0)$. Ist $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ auf $\partial B_{\frac{1}{2}}(0)$ beschränkt, dann gilt

$$\left|f\left(\frac{z}{n_k}\right)\right| \leq M \text{ für alle } z \in \partial B_{\frac{1}{2}}(0) \text{ und allen } k \in \mathbb{N}$$

für ein $M > 0$. Nach dem Maximumsprinzip folgt

$$|f(z)| \leq M \text{ auf jedem Kreisring } z \in \left\{\omega \in \mathbb{C}\colon \frac{1}{2n_{k+1}} \leq |\omega| \leq \frac{1}{2n_k}\right\} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Damit ist die Funktion f beschränkt um 0. Gleiches Vorgehen im Fall, dass $\left(\frac{1}{f_{n_k}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist auf $\partial B_{\frac{1}{2}}(0)$ liefert, dass $\frac{1}{f}$ beschränkt ist um 0. Also folgt die Behauptung. □