Übung 01

1 Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie

Beweis der Kettenregel für Komplex differenzierbar:
Seien $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $g\colon \Omega' \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $g(z_0)$ bzw. z_0. Es gilt wegen der komplexen Differenzierbarkeit von g und f:

$$g(z) - g(z_0) = (z - z_0)T_g(z),\ \ f(z) - f(g(z_0)) = (z - g(z_0))T_f(z).$$

Da g bzw. f komplex differenzierbar sind in z_0 bzw. $g(z_0)$ folgt, dass T_g bzw. T_f stetig sind in z_0 bzw. $g(z_0)$. So folgt aus obigem:

$$f(g(z)) - f(g(z_0)) = (g(z) - g(z_0))T_f(g(z_0)) = (z - z_0)T_f(g(z_0))T_g(z),$$

und $z \mapsto T_f(g(z_0))T_g(z)$ ist stetig in z_0, demnach ist $f \circ g$ komplex differenzierbar in z_0 mit

$$(f \circ g)'(z_0) = T_f(g(z_0))T_g(z_0) = f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0).$$

□

2 Kurvenintegrale in $\mathbb{C}$

Definition: (Länge von stückweise C^1-Kurven)
Ist $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, d.h. γ ist stetig und es existiert eine Zerlegung $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_{m-1}, t_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ so, dass jede Einschränkung $\gamma_{[t_{i-1},t_i]}$ stetig differenzierbar ist auf $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots m$, dann ist die Länge von der Kurve γ gegeben durch

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t.$$

Definition und **Satz**: (Integration längs C^1-Kurven) Ist $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ und $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ eine (stückweise) stetig differenzierbare Kurve, dann sagen wir, dass f längs γ integrierbar ist mit

$$\int_\gamma f \mathrm{d}z := \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\mathrm{d}t \text{ und Standardabschätzung}$$

$$\left|\int_\gamma f \mathrm{d}z\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\mathrm{d}t| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| \leq \sup_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)| \cdot L(\gamma).$$

Satz: (Rechenregeln für Kurvenintegrale)

(1) Sind $f_1, f_2\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetige Funktion und $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ eine (stückweise) stetig differenzierbare Kurve, sowie $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ zwei Konstanten, so ist $f_3 := \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2\colon \Omega \to \mathbb{C}$ längs γ integrierbar mit

$$\int_\gamma f_3 \mathrm{d}z = \int_\gamma (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\mathrm{d}z = \lambda_1 \int_\gamma f_1 \mathrm{d}z + \lambda_2 \int_\gamma f_2 \mathrm{d}z.$$

(2) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$, und $\gamma\colon [a,c] \to \Omega$ eine (stückweise) stetig differenzierbare Kurve und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, und setze $\gamma_1 := \gamma|_{[a,b]}$ und $\gamma_2 = \gamma|_{[b,c]}$, so ist f längs γ integrierbar mit

$$\int_\gamma f \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f \mathrm{d}z.$$

(3) Ist $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ (stückweise) stetig differenzierbare Kurve, dann gilt:

$$\int_{\gamma^-} f \mathrm{d}z = -\int_\gamma f \mathrm{d}z$$

mit Umkehrkurve $\gamma^-(t) := \gamma(a + b - t)$, $t \in [a,b]$.

Beweis: (1) Es folgt aus der Linearität des Integrals:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f_3 \mathrm{d}z &= \int_\gamma (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\mathrm{d}z = \int_a^b (\lambda_1 f_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) + \lambda_2 f_2(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t))\mathrm{d}t \\ &= \lambda_1 \int_a^b f_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\mathrm{d}t + \lambda_2 \int_a^b f_2(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\mathrm{d}t = \lambda_1 \int_\gamma f_1 \mathrm{d}z + \lambda_2 \int_\gamma f_2 \mathrm{d}z.\end{aligned}$$

(2) Es folgt:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f\mathrm{d}z &= \int_a^c f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\mathrm{d}t + \int_b^c f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{\gamma_1} f\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

(3) Laut der Substitutionsregel gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma^-} f\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\gamma(a+b-t)) \cdot (-\gamma'(a+b-t))\mathrm{d}t = \int_b^a f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\mathrm{d}t \\ &= -\int_\gamma f\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

□

Beispiele: Sei die Funktion $f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = y^3 + \mathrm{i}x^3$ für $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, sowie die Kurve $\gamma_\alpha(t) = t^\alpha + \mathrm{i}t$ für $t \in [0, 1]$ und einem $\alpha \geq 1$ gegeben. Zu berechnen ist das Kurvenintegral $\int_{\gamma_\alpha} f\mathrm{d}z$. Die Kurve γ_α ist stetig differenzierbar mit

$$\gamma_\alpha'(t) = \alpha t^{\alpha-1} + \mathrm{i},\ t \in [0, 1].$$

Dann gilt für das Kurvenintegral:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_\alpha} f\mathrm{d}z &= \int_0^1 f(\gamma_\alpha(t)) \cdot \gamma_\alpha'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(t^3 + \mathrm{i}\,(t^\alpha)^3\right) \cdot \left(\alpha t^{\alpha-1} + \mathrm{i}\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\alpha t^{\alpha+2} - t^{3\alpha}\right) + \mathrm{i}\left(\alpha t^{4\alpha-1} + t^3\right) \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{\alpha}{\alpha+3} t^{\alpha+3} - \frac{1}{3\alpha+1} t^{3\alpha+1}\right]_0^1 + \mathrm{i}\left[\frac{\alpha}{4\alpha} t^{4\alpha} + \frac{1}{4} t^4\right]_0^1 \\ &= \frac{\alpha}{\alpha+3} - \frac{1}{3\alpha+1} + \frac{\mathrm{i}}{2} = \frac{3\left(\alpha^2 - 1\right)}{(3\alpha+1) \cdot (\alpha+3)} + \frac{\mathrm{i}}{2}.\end{aligned}$$

□

Satz: (Vertauschungssatz bei gleichmäßiger Konvergenz)
Seien $\gamma\colon [a, b] \to \Omega$ eine (stückweise) stetig differenzierbare Kurve und $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Funktionenfolge von stetigen Funktionen, die auf der Menge $\gamma([a, b])$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f\colon \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n \mathrm{d}z = \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}z = \int_\gamma f\mathrm{d}z.$$

Beweis: Aus Analysis I wissen wir, dass f ebenfalls stetig ist auf $\gamma([a, b])$, also ist das Kurvenintegral $\int_\gamma f\mathrm{d}z$ wohldefiniert. Die Standardabschätzung und die gleichmäßige Konvergenz auf $\gamma([a, b])$ liefern nun:

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f_n \mathrm{d}z - \int_\gamma f\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_\gamma (f_n - f)\,\mathrm{d}z\right| \\ &\leq \sup_{z\in\gamma([a,b])} |f_n(z) - f(z)| \cdot L(\gamma) \to 0 \text{ für } n \to \infty.\end{aligned}$$

Also folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\gamma f_n \mathrm{d}z = \int_\gamma f\mathrm{d}z = \int_\gamma f_n \mathrm{d}z$. □

2.1 Parameterabhängige Integrale

Wir werden zwei Sätze zeigen (Wiederholung aus Analysis II).

Satz: (Stetigkeit von parameterabhängigen Integralen)
Seien $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon \Omega \times [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, dann ist die Funktion

$$\Phi\colon \Omega \to \mathbb{C},\ z \mapsto \Phi(z) := \int_a^b f(z,t)\mathrm{d}t$$

wohldefiniert und stetig auf Ω.

Beweis: Die Funktion Φ ist wohldefiniert, da für jedes $z \in \Omega$ die Funktion $f(z,\cdot)$ stetig ist auf $[a,b]$, daher (Riemann-)integrierbar. Zu $z_0 \in \Omega$ finden wir, da Ω offen ist, einen Radius $r > 0$ mir $\overline{B} := \overline{B_r(z_0)} := \{z \in \mathbb{C} |\ |z - z_0| \leq r\} \subseteq \Omega$. Demnach ist die Menge $K := \overline{B} \times [a,b]$ kompakt und die Stetigkeit von f liefert nun die gleichmäßige Stetigkeit von f auf K, d.h. insbesondere finden wir zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta := \delta(\varepsilon) \in (0,r)$ so, dass für alle $t \in [a,b]$

$$|f(z),t) - f(z_0,t)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z - z_0| \leq \delta$$

gilt. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \delta$ erhalten wir somit nach der Standardabschätzung

$$\begin{aligned}
|\Phi(z) - \Phi(z_0)| &= \left| \int_a^b (f(z,t) - f(z_0,t))\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_a^b |f(z,t) - f(z_0,t)|\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b 1\mathrm{d}t = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Satz: (Ableitung und Integral vertauschen)
Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon \Omega \times [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion so, dass $f(z,\cdot)$ stetig ist für $z \in \Omega$. Setze Φ wie im obigen Satz. Dann gilt: Ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ oder $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig auf $\Omega \times [a,b]$, dann folgt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(z,t)\mathrm{d}t \text{ oder } \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(z,t)\mathrm{d}t.$$

Beweis: (nur Fall mit x, anderer geht analog) Da Ω offen ist, wähle zu $z_0 \in \Omega$ einen Radius $r > 0$ mit $\overline{B} := \overline{B_r(z_0)} := \{z \in \mathbb{C} |\ |z - z_0| \leq r\} \subseteq \Omega$. Wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial x}$ auf $\Omega \times [a,b]$ ist die Funktion $\frac{\partial f}{\partial x}$ gleichmäßig stetig auf $K := \overline{B} \times [a,b]$, also existiert zu $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta := \delta(\varepsilon) \in (0,r)$ so, dass für alle $t \in [a,b]$ gilt:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(z,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(z_0,t) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z - z_0| < \delta.$$

Laut dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt für $h \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f(z_0 + h, t) - f(z_0,t)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(z_0 + sh, t)\mathrm{d}s = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(z_0 + sh, t)\mathrm{d}s.$$

Ist nun $h \in (-\delta, \delta) \subseteq \mathbb{R}$ so haben wir mit der Dreiecks-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\Phi(z_0 + h) - \Phi(z_0)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(z_0,t)\mathrm{d}t \right| &= \left| \int_a^b \left(\frac{f(z_0 + h, t) - f(z_0,t)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(z_0,t) \right) \mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \int_a^b \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0 + sh, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(z_0,t) \right) \mathrm{d}s\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_a^b \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x}(z_0 + sh, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(z_0,t) \right| \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&< \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b \int_0^1 1\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

2.2 Stammfunktionen im Sinne er Funktionentheorie

Definition: (Stammfunktion)
Sei eine stetige Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$, gegeben. Dann nennen wir eine Funktion F eine Stammfunktion von f, falls F komplex differenzierbar auf Ω und $F' = f$ auf Ω ist.

Satz: (Äquivalente Charakterisierung von Stammfunktionen)
Sei eine stetige Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, gegeben. Dann sind äquivalent:

a. F ist eine Stammfunktion von f.

b. Für jede stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ gilt:

$$\int_\gamma f \mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Beweis: a.⇒b.: Sei $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, also $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$, $a = t_0 < \ldots < t_m = b$ und $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ stetig differenzierbar auf $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, m$. Dann folgt mit der Kettenregel und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f \mathrm{d}z &= \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\gamma(t)) \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^m \left(F(\gamma(t_i)) - F(\gamma(t_{i-1}))\right) \\
&= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).
\end{aligned}$$

b.⇒a.: Sei $z_0 \in \Omega$ beliebig. Dann existiert ein Radius $r > 0$ mit $\overline{B} := \overline{B_r(z_0)} \subseteq \Omega$. Die Menge $\overline{B}$ ist kompakt in $\mathbb{C}$ und daher, weil f stetig ist auf Ω, ist f auf $\overline{B}$ gleichmäßig stetig. Wegen b. können wir F schreiben durch

$$F(z) = F(z_0) + \int_{\tau_{z_0 z}} f \mathrm{d}z$$

für alle $z \in B$, wobei $\tau_{z_0 z}(t) = z_0 + t \cdot (z - z_0)$, $t \in [0,1]$, die Verbindungsstrecke zwischen z_0 und z ist. Setze nun

$$F_1(z) := \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \int_{\tau_{z_0 z}} f \mathrm{d}z$$

für $z \in B \backslash \{z_0\}$ und $F_1(z_0) := f(z_0)$. Dann ist wegen $\int_{\tau_{z_0 z}} 1 \mathrm{d}z = z - z_0$ die Differenz:

$$\begin{aligned}
|F_1(z) - F_1(z_0)| &= \left| \frac{1}{z - z_0} \int_{\tau_{z_0 z}} f \mathrm{d}z - f(z_0) \right| \\
&= \frac{1}{|z - z_0|} \left| \int_{\tau_{z_0 z}} (f - f(z_0)) \mathrm{d}z \right| \\
&\leq \frac{1}{|z - z_0|} \int_{\tau_{z_0 z}} |f - f(z_0)| \mathrm{d}z \\
&\leq \sup_{w \in \tau_{z_0 z}([0,1])} |f(w) - f(z_0)| \cdot \frac{1}{|z - z_0|} \int_{\tau_{z_0 z}} 1 \mathrm{d}z \\
&\leq \sup_{z \in \overline{B}} |f(z) - f(z_0)| \to 0 \text{ für } z \to z_0.
\end{aligned}$$

Also ist F_1 in z_0 stetig und damit ist F in z_0 komplex differenzierbar mit $F'(z_0) = f(z_0)$ und da z_0 beliebig war, folgt das F eine Stammfunktion von f ist. □

Definition: (Äquivalenz von Kurven und Homotopie)
Zwei (stückweise) stetig differenzierbare Kurven $\gamma_1\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ heißen äquivalent, falls es eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ gibt mit $\varphi' > 0$ auf $[c,d]$ und $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$. Zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1\colon [a,b] \to \Omega$ mit $A := \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$, $B := \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ heißen homotop, falls es eine stetige Abbildung $H\colon [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ gibt mit

$$H(t,0) = \gamma_0(t),\ H(t,1) = \gamma_1(t) \text{ für alle } t \in [a,b],$$

$$H(a,s) = A,\; H(b,s) = B \text{ für alle } s \in [0,1].$$

Satz: (Unabhängigkeit bei äquivalenten Kurven und Homotopie-Variante)

1. Seien $\gamma_1 \colon [a,b] \to \Omega,\; \gamma_2 \colon [c,d] \to \Omega$ zwei äquivalente Kurven und $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, dann gilt:
$$\int_{\gamma_1} f \mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f \mathrm{d}z.$$
2. Seien $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a,b] \to \Omega$ zwei homotope Kurven und $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die lokal eine Stammfunktion $F \colon \Omega \to \mathbb{C}$ hat, dann gilt:
$$\int_{\gamma_0} f \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f \mathrm{d}z.$$

Beweis (nur von 1.): Da γ_1, γ_2 äquivalent sind, existiert eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi \colon [c,d] \to [a,b]$ mit $\varphi' > 0$ auf $[c,d]$ und $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$. Also erhalten wir mit der Substitutionsregel:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} f \mathrm{d}z &= \int_c^d f(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) \mathrm{d}t = \int_c^d f(\gamma_1(\varphi(t))) \cdot \varphi'(t) \gamma_1'(\varphi(t)) \mathrm{d}t \\ &= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) \mathrm{d}t = \int_a^b f(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) \mathrm{d}t \\ &= \int_{\gamma_1} f \mathrm{d}z.\end{aligned}$$

$\square$

3 Anwendung vom Lemma von Goursat

Folgerung: (Lemma von Goursat für Rechtecke) Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge, $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und es gebe einen Punkt $z_0 \in U$ so, dass f auf $\Omega \backslash \{z_0\}$ holomorph ist. Dann gilt für jedes Rechteck $\square := [a,b] + \mathrm{i}[c,d] \subseteq \Omega$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b,\; c < d$:
$$\int_{\partial \square} f \mathrm{d}z = 0.$$
Beweis: Es lässt sich jedes Rechteck in zwei Dreiecke zerlegen, indem man die Diagonale zieht. Mit der Verschärfung aus Aufgabe 1 folgt dann direkt das Resultat. $\square$