# Übung 02

# 1 Wiederholungen aus Analysis I/II und aus der Vorlesung

## 1.1 Wiederholung aus Analysis I und II

- (Erster Mittelwertsatz der Integralrechnung) Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, eine stetige Funktion, so gibt es eine Stelle $\xi \in [a,b]$ so, dass
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi) \cdot (b-a) \text{ ist.}$$
- (Hölder-Ungleichung) Sind $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, zwei stetige Funktionen, so gilt die folgende Ungleichung
$$\|f \cdot g\|_{L^1([a,b])} := \int_a^b |f(x) \cdot g(x)| \,\mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2([a,b])} \cdot \|g\|_{L^2([a,b])} \,.$$
- (Kompakte Mengen) Sei $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{C}$ eine Menge. Wir nennen die Menge $K$ kompakt, falls für jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$, $I$ Indexmenge (z.B. $K$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$), d.h. $K \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ und für jedes $i \in I$ ist $U_i \subseteq \mathbb{C}$ offen, eine endliche Teilüberdeckung existiert, also $J \subseteq I$ und $J$ ist endlich mit
$$K \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j.$$

## 1.2 Wiederholung aus der Vorlesung

- (Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen) Ist $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$ und Radius $r > 0$ so, dass $\overline{B_r\left(z_0\right)} \subseteq \Omega$ ist, gegeben, dann gilt:
$$f\left(z_0\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) \mathrm{d}t$$
für jede holomorphe Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ auf $\Omega$.
- (Cauchy-Abschätzformeln) Ist $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $z_0 \in \Omega$, sowie Radius $r > 0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subseteq \Omega$. Dann gilt für jede holomorphe Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:
$$\left|f^{(n)}\left(z_0\right)\right| \leq n! \cdot r^{-n} \sup_{z \in \partial B_r(z_0)} |f(z)| \leq n! \cdot r^{-n} \sup_{z \in B_r(z_0)} |f(z)| \,.$$

**Beweis** (der Mittelwerteigenschaft): Es gilt laut der Cauchy-Integralformel für Kreisränder $\partial B_r(z_0)$ mit Kurve $\gamma_r\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto z_0 + r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$:
$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)}{z_0 + r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z_0} \cdot r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

□