

Übung 05

Bemerkung zur Übung:

Es geht um die Frage, ob aus $\text{Res}(f, a) = 0$ und $a \in \mathbb{C}$ ein Pol schon folgt, dass a ein hebbarer Pol ist. Dies ist entgegen meiner Annahme nicht richtig, es war in der Aufgabenstellung ein Fehler. Dies kann man in der Regel nur folgern, wenn a ein einfacher Pol ist (siehe dazu Übungsblatt 05, A2(3)). Ein Gegenbeispiel ist z.B. die Funktion $f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$ mit einem $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und einem Punkt $a \in \mathbb{C}$. Sie hat klar einen Pol der Ordnung n im Punkt a . Die Koeffizienten der Laurentreihe der Funktion f sind gegeben durch

$$c_k = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{Z} \setminus \{-n\} \text{ und } c_{-n} = 1.$$

Da $n \neq 1$ ist, ist $\text{Res}(f, a) = c_{-1} = 0$, aber die Funktion f hat offensichtlich in a keinen hebbaren Pol, sondern eben einen Pol der Ordnung n .