
Studienbegleitende Prüfung

Funktionentheorie I

SS 2004

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Semester:

Hinweise:

1. Diese Klausur enthält 9 Aufgaben. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.
2. Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, insbesondere auch auf zusätzliche Blätter.
3. Zur Bearbeitung der Klausur haben Sie 120 Minuten Zeit. Außer Schreibsachen sind keine Hilfsmittel erlaubt. Lesen Sie die Aufgabenstellung genau durch, bevor Sie eine Aufgabe bearbeiten.
4. Es können maximal 66 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen der Klausur werden 23 Punkte benötigt.

Wird vom Korrektor ausgefüllt:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----------|
| | | | | | | | | | |

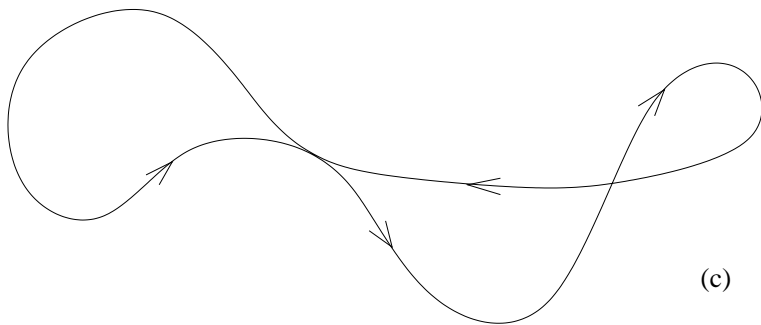
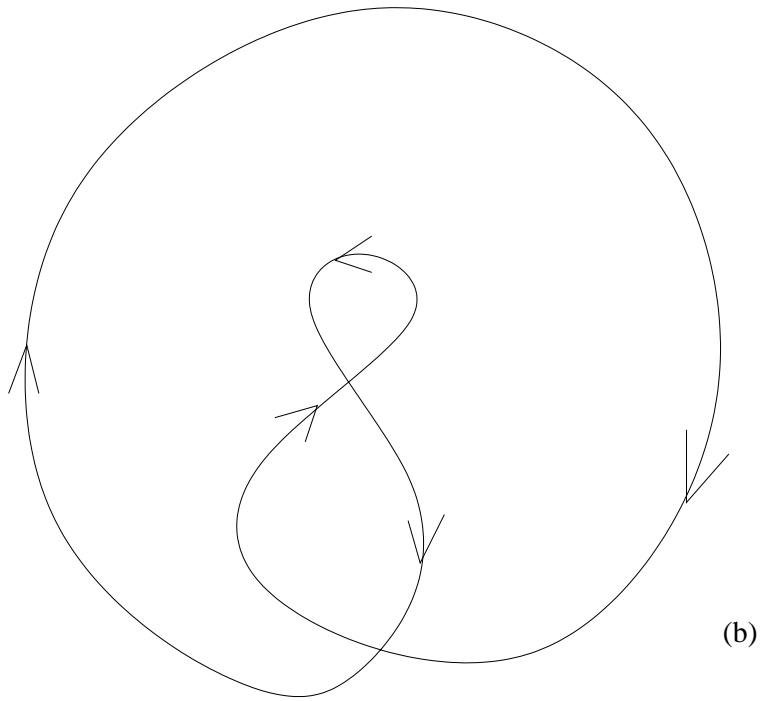
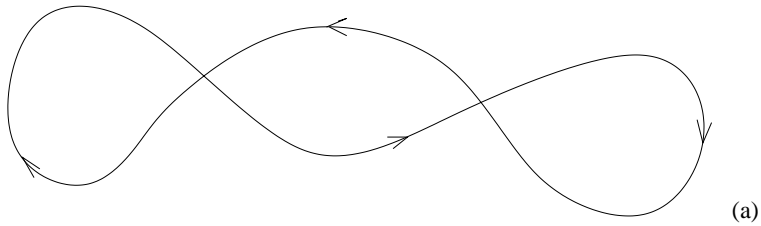
Note:

Name: _____

Aufgabe 1

von 6 Punkten

Geben Sie (ohne Begründung) jeweils für den skizzierten Weg C die Windungszahl $\text{Ind}_C(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus C$ an.



Name: _____

Aufgabe 2

von **7** Punkten

Es sei S die Möbiustransformation $S(z) = i\frac{z+2}{z-2}$. Zeigen Sie, daß S die linke Halbebene auf den Einheitskreis abbildet.

Name: _____

Aufgabe 3

von **8** Punkten

- (a) Formulieren Sie den Satz von Morera.
- (b) Es sei $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, so daß für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Hat f im Punkt 0 eine hebbare Singularität ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Name: _____

Aufgabe 4

von **8** Punkten

Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(\Omega)$. Zeigen Sie:

- (a) Ist $|f(z) - 1| = 2$ für alle $z \in \Omega$, so ist f konstant.
- (b) Ist O eine offene Teilmenge von Ω , so ist $f(O)$ eine offene Teilmenge von \mathbb{C} oder es gibt ein $y_O \in \mathbb{C}$ mit $f(O) = \{y_O\}$.

Name: _____

Aufgabe 5

von **8** Punkten

Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \frac{1}{z(z^2 - 1)}$ in eine Laurentreihe um 0

- (a) auf dem Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$,
- (b) auf dem Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z|\}$.

Name: _____

Aufgabe 6

von **6** Punkten

Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen der Gleichung $z^4 + 5z + 2 = 0$ in den Gebieten $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$.

Name: _____

Aufgabe 7

von 8 Punkten

Berechnen Sie folgende Kurvenintegrale

(a) $\int_C z(e^{z^2} + 1) dz$, wobei C gegeben ist durch $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi/2]$;

(b) $\int_{|z-1|=1} \frac{\sin z}{(z^2 - 1)^2} dz$.

Name: _____

Aufgabe 8

von 7 Punkten

Berechnen Sie folgendes Integral $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^4 + 1} dx$.

Name: _____

Aufgabe 9

von 8 Punkten

Entscheiden Sie (ohne Begründung), welche der folgenden Aussagen richtig, welche falsch sind. Kreuzen Sie Ihre Antwort in der nachfolgenden Tabelle an. Jede richtige Antwort wird mit +1 Punkt, jede falsche Antwort mit -1 Punkt gewertet. Die Gesamtpunktzahl der Aufgabe ergibt sich als die Summe dieser, oder 0, sollte die Summe negativ sein.

- (a) Die Nullstellen eines komplexen Polynoms liegen stets auf einem Kreis in \mathbb{C} .
- (b) Jede in einem Punkt von \mathbb{C} holomorphe Funktion ist dort unendlich oft komplex differenzierbar.
- (c) Es gibt eine Möbiustransformation S , welche die Ellipse $\{\cos t + 2i \sin t : t \in [0, 2\pi)\}$ auf den Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ abbildet.
- (d) Die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 3|z - i|\}$ ist ein Kreis in \mathbb{C} .
- (e) Jede nicht konstante auf \mathbb{C} holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist unbeschränkt.
- (f) Es gibt $f \in H(\mathbb{C})$, so daß $f(z) = 0$ für alle $z \in i\mathbb{R}$ und $f(1 + i) = 2 + 7i$.
- (g) Es gibt $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph mit $f(0) = 1$ und $\operatorname{Re} f(z) \geq 2$ für alle $|z| = 1$.
- (h) Es gibt $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph mit $f(0) = 1$ und $\operatorname{Re} f(z) \leq 2$ für alle $|z| = 1$.

| Frage | richtig | falsch |
|-------|---------|--------|
| (a) | | |
| (b) | | |
| (c) | | |
| (d) | | |
| (e) | | |
| (f) | | |
| (g) | | |
| (h) | | |