Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut I
Prof. Dr. M. von Renteln
Dr. C. Kaiser

29. September 2005

Funktionentheorie I

SS 2005

Name:

Codenummer:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Semester:

Hinweise:

a) Diese Klausur enthält 7 Aufgaben. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

b) Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, insbesondere auch auf zusätzliche Blätter.

c) Zur Bearbeitung der Klausur haben Sie 120 Minuten Zeit. Außer Schreibsachen sind keine Hilfsmittel erlaubt. Lesen Sie die Aufgabenstellung genau durch, bevor Sie eine Aufgabe bearbeiten. Achten Sie besonders auf eine mathematisch korrekte Formulierung Ihrer Lösung.

d) Es können maximal 48 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen der Klausur werden 16 Punkte benötigt.

Wird vom Korrektor ausgefüllt:

1	2	3	4	5	6	7	Σ

Note:

Name: ______________________________

Aufgabe 1

☐ von **6** Punkten

Sei S die Möbiustransformation, die durch $S(z) = \dfrac{i}{i - z}$ gegeben ist.

a) Bestimmen Sie das Bild der Einheitskreislinie unter S.

b) Sei $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \frac{1}{2}\}$. Bestimmen Sie $S^{-1}(H)$.

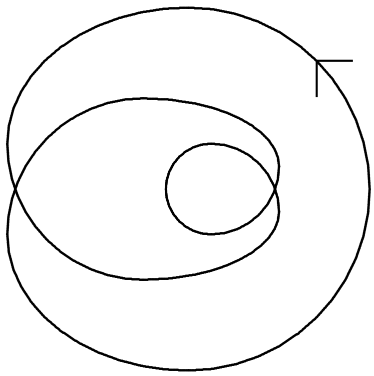
Begründen Sie Ihre Antwort jeweils sorgfältig.

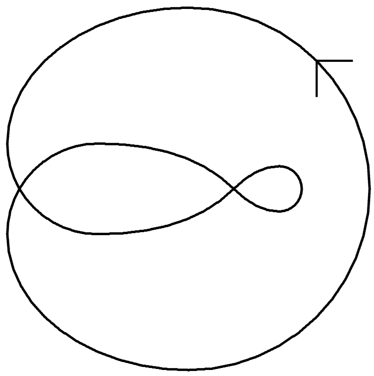
Name: ______________________________

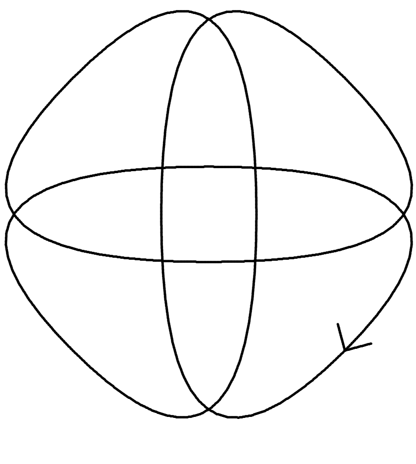
Aufgabe 2

$\square$ von **6** Punkten

Geben Sie jeweils für den skizzierten Weg Γ den Index $\mathrm{Ind}_\Gamma(z)$ für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ an. (Eine Begründung ist nicht verlangt.)







Name: ______________________________

Aufgabe 3

☐ von **9** Punkten

Berechnen Sie folgende Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{(e^{it})} dt,$ b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin(z^2)}{(\sin z)^2} dz,$ c) $\displaystyle\int_{|z|=1} \sin(e^{1/z}) dz.$

Name: ______________________________

Aufgabe 4

☐ von **6** Punkten

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,dz.$$

Name: ______________________________

Aufgabe 5

☐ von **6** Punkten

Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit Nullstellen der Ordnung k in $z_0 \in G$. Zeigen Sie, dass dann $h = \frac{f}{g}$ in z_0 eine hebbare Singularität hat und dass gilt:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k)}(z_0)}.$$

Name: ______________________________

Aufgabe 6

☐ von **6** Punkten

a) Formulieren Sie den Satz von Liouville.

b) Es sei g eine ganze Funktion. Zeigen Sie: Ist g nicht konstant, dann gibt es zu jedem $a \in \mathbb{C}$ eine Folge (z_k) in $\mathbb{C}$, so dass $g(z_k)$ für $k \to \infty$ gegen a konvergiert.

Name: ____________________

Aufgabe 7

☐ von **9** Punkten

Entscheiden Sie (ohne Begründung), welche der folgenden Aussagen richtig, welche falsch sind. Kreuzen Sie Ihre Antwort in der untenstehenden Tabelle an. Jede richtige Antwort wird mit +1 Punkt, jede falsche Antwort mit −1 Punkt bewertet. Für diese Aufgabe gibt es jedoch mindestens 0 Punkte.

a) Ist f in einem Gebiet holomorph, dann hat f dort eine Stammfunktion.

b) Ist f in einem Punkt von $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar, dann ist f dort holomorph.

c) Ist f eine ganze Funktion, die auf der reellen Achse beschränkt ist, dann ist f konstant.

d) Die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z + 3| = |z - 3i|\}$ ist eine Gerade in $\mathbb{C}$.

e) Es gibt eine Möbiustransformation, die keinen Fixpunkt hat.

f) Die Funktion $z \mapsto \overline{\sin \overline{z}}$ ist in ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

g) Es gibt eine ganze Funktion, für die $f(z) = 1$ für $|z| = 1$ und $f(2) = 2$ gilt.

h) Es gibt eine ganze Funktion, für die $f(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$ ist.

i) Es gibt eine ganze Funktion, für die $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{R}$ ist.

Aussage	richtig	falsch
a)		
b)		
c)		
d)		
e)		
f)		
g)		
h)		
i)		