Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dipl.-Math. Matthias Uhl

WS 2011/12

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Um den ersten Teil einzusehen, betrachten wir eine Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	f	w	f
f	w	w	f	w	f	f
f	f	f	w	w	w	w

Die vierte und die siebte Spalte sind gleich; die entsprechenden Aussagen haben also unabhängig von den Wahrheitswerten von A und B stets den gleichen Wahrheitswert, und damit ist $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$ bewiesen.

Nun zum zweiten Teil: Dabei benutzen wir, dass $D \Leftrightarrow \neg\neg D$ für jede Aussage D gilt. Wir erhalten

$$\neg A \vee \neg B \Leftrightarrow \neg\neg(\neg A \vee \neg B).$$

(Um Klammern zu sparen, schreiben wir hier $\neg A \vee \neg B$ statt $(\neg A) \vee (\neg B)$; auch im folgenden lassen wir solche Klammern im Zusammenhang mit $\neg$ weg.) Aufgrund des schon bewiesenen Teils können wir ein $\neg$ „in die Klammer hineinziehen“:

$$\neg\neg(\neg A \vee \neg B) \Leftrightarrow \neg(\neg\neg A \wedge \neg\neg B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge B).$$

Damit ist auch der zweite Teil der Behauptung gezeigt.

Es sei A die Aussage „Ich bin dick“ und B die Aussage „Ich bin glücklich“. Dann haben wir gezeigt, dass die Negation der Aussage „Ich bin dick oder glücklich“ lautet: „Ich bin dünn und unglücklich“. Und wir haben gezeigt, dass die Negation der Aussage „Ich bin dick und glücklich“ lautet: „Ich bin dünn oder unglücklich“.

b) Den ersten Teil der Behauptung liefert die folgende Wahrheitstafel:

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	f
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Da die fünfte und die letzte Spalte gleich sind, haben die entsprechenden Aussagen unabhängig von den Wahrheitswerten von A, B und C stets den gleichen Wahrheitswert. Hiermit ist $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ gezeigt.

Den zweiten Teil zeigen wir mit der gleichen Methode wie eben: Wir verwenden $D \Leftrightarrow \neg\neg D$ und das in a) und b) schon Bewiesene:

$$
\begin{aligned}
A \vee (B \wedge C) \;\Leftrightarrow\; \neg\neg\big(A \vee (B \wedge C)\big) &\overset{\textbf{a)}}{\Leftrightarrow} \neg\big(\neg A \wedge \neg(B \wedge C)\big) \overset{\textbf{a)}}{\Leftrightarrow} \neg\big(\neg A \wedge (\neg B \vee \neg C)\big) \\
&\overset{\textbf{b)}}{\Leftrightarrow} \neg\big((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg C)\big) \overset{\textbf{a)}}{\Leftrightarrow} \neg(\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg C) \\
&\overset{\textbf{a)}}{\Leftrightarrow} (\neg\neg A \vee \neg\neg B) \wedge (\neg\neg A \vee \neg\neg C) \;\Leftrightarrow\; (A \vee B) \wedge (A \vee C)
\end{aligned}
$$

Es sei
A die Aussage „Ich bin reich“,
B die Aussage „Ich bin glücklich“ und
C die Aussage „Das Wetter ist schön“.

In b) haben wir gezeigt: „Ich bin reich und ich bin glücklich oder das Wetter ist schön“ ist genau dann wahr, wenn „Ich bin reich und ich bin glücklich“ oder „Ich bin reich und das Wetter ist schön“ wahr ist.
Außerdem haben wir gezeigt: „Ich bin reich oder ich bin glücklich und das Wetter ist schön“ ist genau dann wahr, wenn „Ich bin reich oder ich bin glücklich“ und „Ich bin reich oder das Wetter ist schön“ wahr ist.

c) Wir stellen eine Wahrheitstafel auf (die Tafel für $\Leftrightarrow$ ist aus der Vorlesung bekannt):

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	$(A \wedge B) \vee \big((\neg A) \wedge (\neg B)\big)$
w	w	w	w	f	f	f	w
w	f	f	f	f	w	f	f
f	w	f	f	w	f	f	f
f	f	w	f	w	w	w	w

Da die dritte und die letzte Spalte gleich sind, haben die entsprechenden Aussagen unabhängig von den Wahrheitswerten von A und B stets den gleichen Wahrheitswert. Hiermit ist die Äquivalenz von $A \Leftrightarrow B$ und $(A \wedge B) \vee \big((\neg A) \wedge (\neg B)\big)$ gezeigt.

Aufgabe 2

a) Die drei bekannten Tatsachen lassen sich wie folgt ausdrücken und umformen:

- $\big[(\neg C) \Rightarrow (\neg B)\big] \overset{\text{Vorl.}}{\Leftrightarrow} \big[B \Rightarrow C\big]$
- $\big[\big(B \wedge (\neg C)\big) \vee \big((\neg B) \wedge C\big)\big] \overset{\textbf{1c)}}{\Leftrightarrow} \big[B \Leftrightarrow (\neg C)\big]$
- $\big[(A \wedge C) \vee \big((\neg A) \wedge (\neg C)\big)\big] \overset{\textbf{1c)}}{\Leftrightarrow} \big[A \Leftrightarrow C\big]$

b) Wir betrachten die folgende Wahrheitstafel:

A	B	C	$B \Rightarrow C$	$\neg C$	$B \Leftrightarrow (\neg C)$	$A \Leftrightarrow C$
w	w	w	w	f	f	w
w	w	f	f	w	w	f
w	f	w	w	f	w	w
w	f	f	w	w	f	f
f	w	w	w	f	f	f
f	w	f	f	w	w	w
f	f	w	w	f	w	f
f	f	f	w	w	f	w

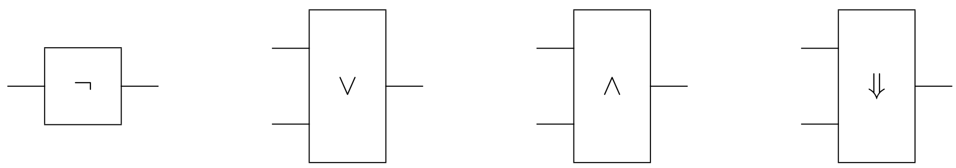
Nur in der dritten Zeile liefern alle drei Ausdrücke $B \Rightarrow C$, $B \Leftrightarrow (\neg C)$ und $A \Leftrightarrow C$ den Wert „wahr“; also lautet die Lösung: Anton und Chris kommen, Berta nicht.

Aufgabe 3

a) Das Anliegen von Spannung wird mit „wahr“ identifiziert, deren Fehlen mit „falsch“. Dann gilt: Ein $\neg$-Gatter mit Eingang A liefert an seinem Ausgang $\neg A$. Ein $\vee$-Gatter mit den Eingängen A und B liefert an seinem Ausgang $A \vee B$.

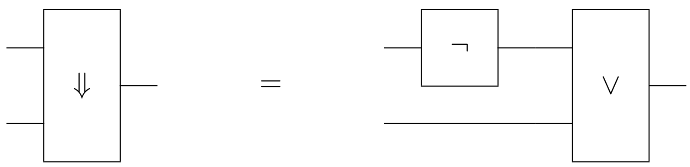
Damit ergibt sich: Ein $\wedge$-Gatter ist ein Bauteil mit zwei Eingängen und einem Ausgang; am Ausgang liegt genau dann Spannung an, wenn an beiden Eingängen Spannung anliegt. Ein $\Rightarrow$-Gatter ist ein Bauteil mit zwei Eingängen A und B und einem Ausgang; am Ausgang liegt genau dann Spannung an, wenn am Eingang B Spannung anliegt oder an A keine Spannung anliegt. Wie man schon aus dieser Beschreibung sieht, sind also bei einem $\Rightarrow$-Gatter die Eingänge nicht „gleichberechtigt“.

Wir verwenden folgende Symbole für die Gatter:

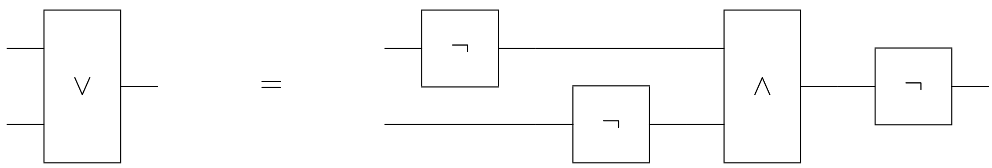


Links sind dabei jeweils die Eingänge und rechts der Ausgang. Beim $\Rightarrow$-Gatter ist zu beachten, dass der obere Eingang der Eingang A sein soll (daher auch die Pfeilrichtung).

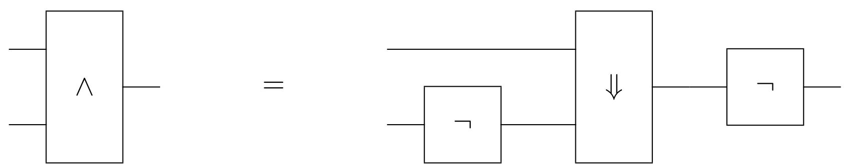
b) Definitionsgemäß gilt $[A \Rightarrow B] \;\Leftrightarrow\; [(\neg A) \vee B]$. Also:



c) Es gilt $A \vee B \;\Leftrightarrow\; \neg\neg(A \vee B) \;\overset{\textbf{1a)}}{\Leftrightarrow}\; \neg\big((\neg A) \wedge (\neg B)\big)$. Wir haben somit folgenden Bauplan:



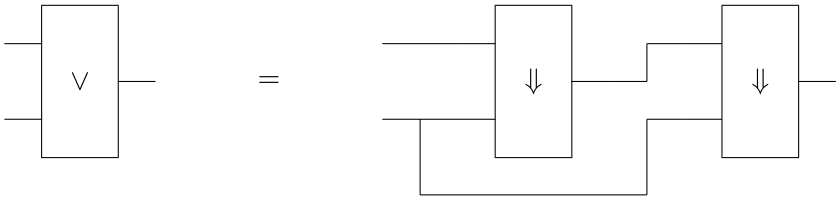
d) Wie in **c)** sieht man: $A \wedge B \;\Leftrightarrow\; \neg\big((\neg A) \vee (\neg B)\big)$. Wegen $\big[(\neg A) \vee (\neg B)\big] \;\Leftrightarrow\; \big[A \Rightarrow (\neg B)\big]$ erhalten wir: $A \wedge B \;\Leftrightarrow\; \neg\big(A \Rightarrow (\neg B)\big)$. Auch diese Bauanleitung zeichnen wir auf:



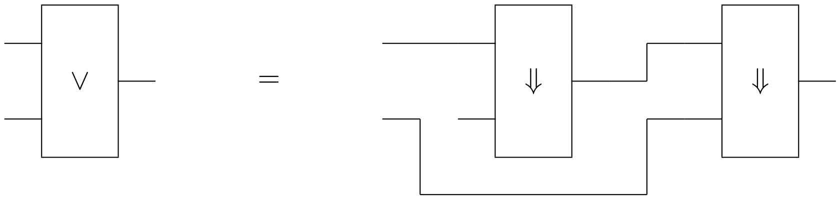
e) Hier kann man etwas herumprobieren; oder man verwendet die folgende Umformung. Im ersten Schritt wird hier benutzt, dass $\neg B \vee B$ stets wahr ist und dass daher $D \wedge (\neg B \vee B) = D$ für jede Aussage D gilt.

$$\begin{aligned} A \vee B \;\Leftrightarrow\; (A \vee B) \wedge (\neg B \vee B) \;&\overset{\textbf{1b)}}{\Leftrightarrow}\; (A \wedge \neg B) \vee B \;\Leftrightarrow\; \big[\neg\neg(A \wedge \neg B)\big] \vee B \\ &\overset{\textbf{1a)}}{\Leftrightarrow}\; \big[\neg(\neg A \vee B)\big] \vee B \;\Leftrightarrow\; \big[\neg(A \Rightarrow B)\big] \vee B \;\Leftrightarrow\; \big[(A \Rightarrow B) \Rightarrow B\big] \end{aligned}$$

Dies liefert das folgende Schema:



Bemerkung: Eine andere Möglichkeit sieht wie folgt aus:



Hier wird der untere Eingang des linken $\Rightarrow$-Gatters nirgends angeschlossen, so dass er stets ohne Spannung bleibt. Auf diese Weise wirkt das linke $\Rightarrow$-Gatter dann wie ein $\neg$-Gatter auf seinen oberen Eingang – symbolisch geschrieben: $\neg A \;\Leftrightarrow\; (A \Rightarrow \text{falsch})$. Die Richtigkeit des Bauplans ergibt sich dann aus der Gleichheit $A \vee B \;\Leftrightarrow\; \big[(\neg A) \Rightarrow B\big]$.

Aufgabe 4

a) Die Aussage „Alle Karlsruher fahren mit dem Fahrrad und der Straßenbahn“ entsteht aus den beiden Teilaussagen

A : „Alle Karlsruher fahren mit dem Fahrrad.“
B : „Alle Karlsruher fahren mit der Straßenbahn.“

mittels der logischen Verknüpfung $\wedge$ (und). Negation ergibt

$$\neg(A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \vee (\neg B),$$

also lautet die Negation obiger Aussage

„Es gibt einen Karlsruher, der nicht mit dem Fahrrad fährt,
oder es gibt einen Karlsruher, der nicht mit der Straßenbahn fährt“

bzw. kurz

„Es gibt einen Karlsruher, der nicht mit dem Fahrrad oder nicht mit der Straßenbahn fährt“.

b) Es sei A die Aussage „Morgen ist schönes Wetter“ und B die Aussage „Alle Studierenden gehen in den Schlossgarten“, dann müssen wir $A \Rightarrow B$ verneinen. Es gilt:

$$\neg(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; \neg\big((\neg A) \vee B\big) \;\Leftrightarrow\; \big(\neg(\neg A) \wedge (\neg B)\big) \;\Leftrightarrow\; A \wedge (\neg B).$$

Somit lautet die Negation des Satzes: „Morgen ist schönes Wetter, und es gibt einen Studierenden, der nicht in den Schlossgarten geht“.

c) Betrachten wir die drei Aussagen

A : „Im Kino läuft Herr der Ringe“,
B : „Im Kino läuft James Bond“,
C : „Ich gehe ins Kino“.

Dann entspricht die Aussage „Ich gehe immer ins Kino, wenn Herr der Ringe oder James Bond laufen“: $(A \vee B) \Rightarrow C$. Wegen $(E \Rightarrow C) \;\Leftrightarrow\; (\neg E \vee C)$ für jede Aussage E ist

$$\neg\big((\underbrace{A \vee B}_{=E}) \Rightarrow C\big) \quad \Leftrightarrow \quad \neg\big(\neg(\underbrace{A \vee B}_{=E}) \vee C\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big((A \vee B) \wedge \neg C\big).$$

In Worten: „Im Kino läuft ein Herr der Ringe- oder ein James Bond-Film, und ich gehe (dennoch) nicht ins Kino“.

d) Wir wollen $\exists x$ mit $A(x)$: $B(x)$ negieren, wobei die Aussageformen $A(x)$ und $B(x)$ durch

$$A(x) : \text{„}x \text{ ist ein Mensch.“}$$
$$B(x) : \text{„Mathematik macht } x \text{ keinen Spaß.“}$$

gegeben sind. Wegen $\neg\big(\exists x \text{ mit } A(x)\colon B(x)\big) \;\Leftrightarrow\; \big(\forall x \text{ mit } A(x)\colon \neg B(x)\big)$ ist die Negation der ursprünglichen Aussage: „Allen Menschen macht Mathematik Spaß“.

Aufgabe 5

Seien M_1, M_2, M_3 beliebige Mengen.

a) Es gelte $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_3$. Um $M_1 \subset M_3$ zu zeigen, müssen wir begründen, warum jedes Element aus M_1 auch in M_3 liegt.

Sei hierzu $x \in M_1$ beliebig. Wegen $M_1 \subset M_2$ liegt x auch in M_2 und aufgrund von $M_2 \subset M_3$ ist x auch in M_3 enthalten.

Da $x \in M_1$ beliebig war, haben wir eingesehen, dass jedes Element aus M_1 ebenfalls in M_3 liegt, d.h. $M_1 \subset M_3$.

b) Die Äquivalenz der drei Aussagen **i)**, **ii)**, **iii)** erhalten wir am geschicktesten aus der Implikationskette „**i)** $\Rightarrow$ **ii)** $\Rightarrow$ **iii)** $\Rightarrow$ **i)**“.

„**i)** $\Rightarrow$ **ii)**“: Es gelte $M_1 \subset M_2$. Um nun die Gleichheit der beiden Mengen $M_1 \cap M_2$ und M_1 zu zeigen, müssen wir die beiden Inklusionen $M_1 \cap M_2 \subset M_1$ und $M_1 \subset M_1 \cap M_2$ einsehen.

Die Inklusion $M_1 \cap M_2 \subset M_1$ gilt gemäß der Definition des Durchschnitts von Mengen.

Zur umgekehrten Inklusion $M_1 \subset M_1 \cap M_2$: Sei $x \in M_1$ beliebig. Wegen $M_1 \subset M_2$ gilt auch $x \in M_2$. Dann ist aber x sowohl in M_1 als auch in M_2, also in $M_1 \cap M_2$. Da $x \in M_1$ beliebig war, haben wir gezeigt, dass jedes Element aus M_1 auch in $M_1 \cap M_2$ liegt, d.h. $M_1 \subset M_1 \cap M_2$.

„**ii)** $\Rightarrow$ **iii)**“: Hier müssen wir unter der Voraussetzung $M_1 \cap M_2 = M_1$ nur die Inklusion $M_1 \cup M_2 \subset M_2$ begründen (die umgekehrte Inklusion $M_1 \cup M_2 \supset M_2$ gilt immer, vgl. Definition der Vereinigung von Mengen). Sei also $x \in M_1 \cup M_2$. Ist $x \in M_2$, so ist nichts zu zeigen. Ist $x \in M_1 = M_1 \cap M_2$, so ist $x \in M_2$, was zu zeigen war.

„**iii)** $\Rightarrow$ **i)**“: Es gelte $M_1 \cup M_2 = M_2$. Zu zeigen ist $M_1 \subset M_2$. Sei hierzu $x \in M_1$. Dann ist jedenfalls $x \in M_1 \cup M_2 = M_2$.