Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2011/12
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dipl.-Math. Matthias Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Eine injektive Abbildung ist beispielsweise gegeben durch $f_1 \colon M \to N$, $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 4, 7 \mapsto 8$. Nicht injektiv ist etwa $f_2 \colon M \to N$, $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2, 7 \mapsto 8$. Beide Abbildungen sind nicht surjektiv. Surjektive Abbildungen und damit auch bijektive Abbildungen von M nach N gibt es nicht, weil N mehr Elemente als M enthält.

Aus dem gleichen Grund existiert keine injektive Abbildung von N nach M. Ist beispielsweise $g_1 \colon N \to M$, $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2, 8 \mapsto 2$ und $9 \mapsto 7$, so ist g_1 nicht surjektiv. Definiert man z.B. $g_2 \colon N \to M$ durch $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2$, $8 \mapsto 4$ und $9 \mapsto 7$, dann ist g_2 surjektiv.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\pi \colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ eine Funktion.

"$\Rightarrow$": Sei π injektiv. Betrachte die Bildmenge $B := \pi(\{1, 2, \ldots, n\}) = \{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)\}$ von π. Wir behaupten, dass diese n verschiedene Elemente enthält. Falls nämlich B aus weniger als n Elementen bestünde, müsste es zwei verschiedene Elemente $x_1, x_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ geben mit $\pi(x_1) = \pi(x_2)$. Dies steht aber im Widerspruch zur Injektivität von π, so dass solche x_1, x_2 nicht existieren. Also enthält B tatsächlich n verschiedene Elemente und wegen $B \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ muss $B = \{1, 2, \ldots, n\}$ gelten. Also ist π surjektiv.

"$\Leftarrow$": Hier müssen wir folgende Implikation begründen: Falls π surjektiv ist, so ist π injektiv. Diese schreiben wir mittels Kontraposition äquivalent um: Falls π nicht injektiv ist, so ist π nicht surjektiv. Um die letzte Aussage einzusehen, setzen wir voraus, dass π nicht injektiv ist. Darum gibt es $x_1, x_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $x_1 \neq x_2$ und $\pi(x_1) = \pi(x_2)$. Hieraus folgt, dass $\pi(\{1, 2, \ldots, n\}) = \{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)\}$ weniger als n (verschiedene) Elemente enthält und somit $\pi(\{1, 2, \ldots, n\}) \neq \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt. Das bedeutet, dass π nicht surjektiv ist.

Aufgabe 2

a) f_1 ist injektiv, denn für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gilt

$$f_1(x) = f_1(y) \quad \Rightarrow \quad x = y\,.$$

f_1 ist auch surjektiv. Um dies zu begründen, müssen wir zeigen, dass es zu jedem $y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ein $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gibt mit $f_1(x) = y$. Sei dazu $y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Ist $x := y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gesetzt, so gilt $f_1(x) = y$.

Da f_1 sowohl injektiv als auch surjektiv ist, ist f_1 bijektiv. Daher existiert die Umkehrfunktion $f_1^{-1} \colon \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ von f_1. Zur Berechnung von f_1^{-1} lösen wir die Gleichung $f_1(x) = y$ nach x auf (hier sind $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, y \in f_1(\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$): $f_1(x) = y \;\Leftrightarrow\; x = y$. Also ist $f_1^{-1} \colon \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $y \mapsto y$.

Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gilt

$$f_2(x) = 1 + \frac{x}{1 - x} = \frac{1 - x + x}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}\,.$$

f_2 ist injektiv, denn für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ ergibt sich

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad x-1 \neq y-1 \quad \overset{x,y\neq 1}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1} \quad \Rightarrow \quad f_2(x) \neq f_2(y)\,.$$

f_2 ist auch surjektiv: Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Für $x := 1 - \frac{1}{y} \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ gilt

$$f_2(x) = \frac{1}{1-(1-\frac{1}{y})} = \frac{1}{1-1+\frac{1}{y}} = y\,.$$

Insgesamt haben wir gezeigt, dass f_2 bijektiv ist und daher die Umkehrfunktion f_2^{-1} existiert. Dem Beweis der Surjektivität von f_2 entnehmen wir $f_2^{-1}\colon \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, y \mapsto 1 - \frac{1}{y}$.

Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ gilt $f_3(x) = 1 - \frac{1}{x} = f_2^{-1}(x)$. Also sind f_3 und f_2^{-1} identisch. Da f_2^{-1} bijektiv ist, gilt das selbe auch für f_3. Außerdem ergibt sich $f_3^{-1} = f_2$.

b) Da f_1 die Identität auf $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ ist, gilt $f_1 \circ f_k = f_k$ für alle $k \in \{1,2,3\}$ und $f_j \circ f_1 = f_j$ für alle $j \in \{1,2,3\}$. Ferner erhalten wir wegen $f_2 = f_3^{-1}$ und $f_3 = f_2^{-1}$ für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

$$(f_3 \circ f_2)(x) = f_3(f_2(x)) = f_3(f_3^{-1}(x)) = x = f_1(x)\,,$$
$$(f_2 \circ f_3)(x) = f_2(f_3(x)) = f_2(f_2^{-1}(x)) = x = f_1(x)\,,$$

d.h. $f_3 \circ f_2 = f_1$ und $f_2 \circ f_3 = f_1$. Überdies erkennen wir für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

$$(f_2 \circ f_2)(x) = f_2(f_2(x)) = \frac{1}{1-f_2(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{1-x-1} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} = f_3(x)\,,$$
$$(f_3 \circ f_3)(x) = f_3(f_3(x)) = 1 - \frac{1}{f_3(x)} = 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 - \frac{x}{x-1} = \frac{x-1-x}{x-1} = \frac{1}{1-x} = f_2(x)\,,$$

d.h. $f_2 \circ f_2 = f_3$ und $f_3 \circ f_3 = f_2$.

Aufgabe 3

a) **i)** Wir argumentieren mit Hilfe von Kontraposition und zeigen die äquivalente Aussage: Falls f nicht injektiv ist, dann ist auch $h := g \circ f$ nicht injektiv.

Sei dazu $f\colon X \to Y$ nicht injektiv, d.h. es gibt $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ und $f(x_1) = f(x_2)$. Dann folgt aber $h(x_1) = g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) = h(x_2)$; also ist h nicht injektiv.

ii) Erneut verwenden wir Kontraposition. Sei g nicht surjektiv, d.h. $g(Y) \neq Z$, also: Es gibt ein $z \in Z$ so, dass für alle $y \in Y$ gilt: $g(y) \neq z$. Insbesondere gilt dann aber $h(x) = g\big(f(x)\big) \neq z$ für alle $x \in X$, d.h. h ist nicht surjektiv.

b) **i)** Die Funktionen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ seien bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv.

Um die Bijektivität von $h := g \circ f$ zu zeigen, müssen wir begründen, dass h sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Zuerst zeigen wir, dass h injektiv ist, dass also für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt:

Aus $x_1 \neq x_2$ folgt $h(x_1) \neq h(x_2)$.

Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ beliebig. Zu zeigen ist $h(x_1) \neq h(x_2)$.
Wegen der Injektivität von f gilt dann $f(x_1) \neq f(x_2)$. Wegen der Injektivität von g folgt daraus aber $g\big(f(x_1)\big) \neq g\big(f(x_2)\big)$, und nach Definition der Komposition bedeutet dies gerade $h(x_1) \neq h(x_2)$.

Jetzt müssen wir noch die Surjektivität von h zeigen; diese folgt aus der Surjektivität von f und g. Zu zeigen ist $h(X) = Z$, also:

Zu jedem $z \in Z$ existiert ein $x \in X$ mit $h(x) = z$.

Sei dazu $z \in Z$ beliebig. Nun müssen wir ein $x \in X$ mit $h(x) = z$ angeben.
Da g surjektiv ist, existiert zu z ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjektiv ist, gibt es zu diesem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Es folgt:

$$h(x) = g\big(f(x)\big) = g(y) = z.$$

ii) Es seien $h = g \circ f$ surjektiv und g injektiv. Wir wollen zeigen, dass dann f surjektiv ist. Sei dazu $y \in Y$ beliebig. Nun müssen wir begründen, warum es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt. Da $h\colon X \to Z$ surjektiv ist, existiert zu $g(y) \in Z$ ein $x \in X$ mit

$$g(y) = h(x) = g\big(f(x)\big).$$

Wegen der Injektivität von g folgt hieraus $y = f(x)$ und damit die Surjektivität von f.

Aufgabe 4

a) Wegen

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{für } x+1 \geqslant 0 \\ -(x+1) & \text{für } x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1 & \text{für } x \geqslant -1 \\ -x-1 & \text{für } x < -1 \end{cases}$$

und

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{für } x-4 \geqslant 0 \\ -(x-4) & \text{für } x-4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-4 & \text{für } x \geqslant 4 \\ -x+4 & \text{für } x < 4 \end{cases}$$

führen wir die Fallunterscheidung $x \in (-\infty, -1)$, $x \in [-1, 4)$, $x \in [4, \infty)$ durch, um die Beträge aufzulösen.

1. Fall: $x \in (-\infty, -1)$. Es gilt

$$|x-4| = |x+1| \quad\Leftrightarrow\quad -(x-4) = -(x+1) \quad\Leftrightarrow\quad -x+4 = -x-1 \quad\Leftrightarrow\quad 4 = -1.$$

Dies ist falsch. Daher ist die gegebene Gleichung für kein $x \in (-\infty, -1)$ erfüllt.

2. Fall: $x \in [-1, 4)$. Es gilt

$$\begin{aligned} |x-4| = |x+1| \quad&\Leftrightarrow\quad -(x-4) = x+1 \quad\Leftrightarrow\quad -x+4 = x+1 \\ &\Leftrightarrow\quad -2x = -3 \quad\Leftrightarrow\quad x = 3/2. \end{aligned}$$

In diesem Fall ist die gegebene Gleichung genau für $x = 3/2 \in [-1, 4)$ erfüllt. [Hierbei ist zu beachten, dass man $3/2 \in [-1, 4)$ prüfen muss. Andernfalls würde man die Zahl $3/2$ in diesem Fall nicht betrachten und könnte nicht folgern, dass $3/2$ die gegebene Gleichung erfüllt.]

3. Fall: $x \in [4, \infty)$. Es gilt

$$|x-4| = |x+1| \quad\Leftrightarrow\quad x-4 = x+1 \quad\Leftrightarrow\quad -4 = 1.$$

Dies ist falsch. Daher ist die gegebene Gleichung für kein $x \in [4, \infty)$ erfüllt.

Fazit: $|x-4| = |x+1| \ \Leftrightarrow\ x = 3/2$.

Alternativ führen auch geometrische Überlegungen zum Ziel: Gesucht sind diejenigen $x \in \mathbb{R}$, die denselben Abstand zu 4 wie zu -1 haben, d.h. x liegt genau in der Mitte: $x = \frac{4+(-1)}{2} = \frac{3}{2}$.

b) Die Ungleichung $|2x| > |5-2x|$ besagt im Fall $x = 0$: $0 > 5$. Dies ist falsch. Deshalb kann $|2x| > |5-2x|$ nur für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ erfüllt sein. Für solche x gilt

$$\begin{aligned} |2x| > |5-2x| \quad&\Leftrightarrow\quad \left|\frac{5-2x}{2x}\right| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad -1 < \underbrace{\frac{5-2x}{2x}}_{=\frac{5}{2x}-1} < 1 \quad\Leftrightarrow\quad 0 < \frac{5}{2x} < 2 \\ &\Leftrightarrow\quad \frac{2}{5}x > \frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x > \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

c) Es ist

$$
\begin{aligned}
&|2-|2-x|| \leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad -1 \leqslant 2-|2-x| \leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad -3 \leqslant -|2-x| \leqslant -1\\
\Leftrightarrow\quad & 1 \leqslant |2-x| \leqslant 3 \quad\Leftrightarrow\quad 1 \leqslant 2-x \leqslant 3 \;\text{ oder }\; 1 \leqslant -(2-x) \leqslant 3\\
\Leftrightarrow\quad & 1 \leqslant 2-x \leqslant 3 \;\text{ oder }\; -3 \leqslant 2-x \leqslant -1 \quad\Leftrightarrow\quad -1 \leqslant -x \leqslant 1 \;\text{ oder }\; -5 \leqslant -x \leqslant -3\\
\Leftrightarrow\quad & -1 \leqslant x \leqslant 1 \quad\text{oder}\quad 3 \leqslant x \leqslant 5 \quad\Leftrightarrow\quad x \in [-1,1] \cup [3,5].
\end{aligned}
$$

d) Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Fall: $x \in (-\infty, -1)$. Mit $|x+1| = -(x+1)$ und $|x-1| = -(x-1)$ ergibt sich

$$|x+1| + |x-1| = -2x.$$

Deshalb gilt

$$|x+1| + |x-1| > 2 \quad\Leftrightarrow\quad -2x > 2 \quad\Leftrightarrow\quad x < -1.$$

2. Fall: $x \in [-1, 1)$. Hier ist $|x+1| = x+1$ und $|x-1| = -(x-1)$, also

$$|x+1| + |x-1| = 2.$$

Demzufolge lautet in diesem Fall die Ungleichung: $2 > 2$. Diese ist unlösbar.

3. Fall: $x \in [1, \infty)$. Wegen $|x+1| = x+1$ und $|x-1| = x-1$ folgt

$$|x+1| + |x-1| = 2x$$

und damit

$$|x+1| + |x-1| > 2 \quad\Leftrightarrow\quad 2x > 2 \quad\Leftrightarrow\quad x > 1.$$

Zusammenfassend haben wir:

$$|x+1| + |x-1| > 2 \quad\Leftrightarrow\quad x < -1 \text{ oder } x > 1 \quad\Leftrightarrow\quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

e) Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

1. Fall: $x < 0$. Dann ist $|x| = -x$, und es gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2 \quad&\Leftrightarrow\quad 3x < 4x^2(1-x) \quad\Leftrightarrow\quad 0 < -4x^3 + 4x^2 - 3x\\
&\Leftrightarrow\quad 0 < -4x\Big(x^2 - x + \frac{3}{4}\Big) \quad\Leftrightarrow\quad 0 < -4x\underbrace{\Big[\Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big]}_{\geqslant \frac{1}{2} > 0}\\
&\Leftrightarrow\quad 0 < -4x \quad\Leftrightarrow\quad x < 0.
\end{aligned}
$$

2. Fall: $x \geqslant 0$. Dann ist $|x| = x$, und es gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2 \quad&\Leftrightarrow\quad 3x < 4x^2(1+x) \quad\Leftrightarrow\quad 0 < 4x^3 + 4x^2 - 3x\\
&\Leftrightarrow\quad 0 < 4x\Big(x^2 + x - \frac{3}{4}\Big) \quad\Leftrightarrow\quad 0 < 4x\Big[\Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 - 1\Big]\\
&\overset{x \geqslant 0}{\Leftrightarrow}\quad 4x > 0 \;\text{ und }\; \Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 - 1 > 0\\
&\Leftrightarrow\quad x > 0 \;\text{ und }\; \Big|x + \frac{1}{2}\Big| > 1\\
&\Leftrightarrow\quad x > 0 \;\text{ und }\; \Big(x + \frac{1}{2} > 1 \;\text{ oder }\; -(x + \frac{1}{2}) > 1\Big)\\
&\Leftrightarrow\quad x > 0 \;\text{ und }\; \Big(x + \frac{1}{2} > 1 \;\text{ oder }\; x + \frac{1}{2} < -1\Big)\\
&\Leftrightarrow\quad x > 0 \;\text{ und }\; \Big(x > \frac{1}{2} \;\text{ oder }\; x < -\frac{3}{2}\Big)\\
&\Leftrightarrow\quad x > \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Demzufolge gilt $\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2$ genau für $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 0$ oder $x > \frac{1}{2}$.

f) Auf keinen Fall kommt $x = 1$ in Frage, denn die Division durch 0 ist nicht definiert. Ansonsten multiplizieren wir die Ungleichung mit $1 - x$. Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: Sei zunächst $1 - x > 0$, also $x < 1$. Multiplikation mit $1 - x$ liefert

$$\begin{aligned} 2x + \frac{1}{1-x} \geqslant 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x(1-x) + 1 \geqslant 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 2x^2 + 1 \geqslant 1 - x \\ &\Leftrightarrow \quad 3x - 2x^2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(3-2x) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt genau dann, wenn $x \geqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$ oder aber wenn $x \leqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$ sind.

$x \geqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$ bedeutet $x \geqslant 0$ und $x \leqslant 3/2$, also $0 \leqslant x \leqslant 3/2$. Da wir im 1. Fall nur $x < 1$ betrachten, ergibt sich also $0 \leqslant x < 1$.

$x \leqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$ bedeutet $x \leqslant 0$ und $x \geqslant 3/2$, was nicht gleichzeitig möglich ist.

2. Fall: Jetzt sei $1 - x < 0$, also $x > 1$. Dann dreht sich bei Multiplikation mit $1 - x$ das $\geqslant$ um, und wir erhalten

$$2x + \frac{1}{1-x} \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x(1-x) + 1 \leqslant 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad x(3-2x) \leqslant 0.$$

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn $x \geqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$ oder aber wenn $x \leqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$ sind.

$x \geqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$ bedeutet $x \geqslant 0$ und $x \geqslant 3/2$, also $x \geqslant 3/2$.

$x \leqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$ bedeutet $x \leqslant 0$ und $x \leqslant 3/2$, also $x \leqslant 0$. Da wir im 2. Fall nur $x > 1$ betrachten, ist dies hier nicht möglich.

Insgesamt: Die Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn $0 \leqslant x < 1$ oder $x \geqslant 3/2$.

Aufgabe 5

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten die beiden Fälle $x - y \geqslant 0$ und $x - y < 0$.

1. Fall: $x \geqslant y$. Dann ist $|x - y| = x - y$, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{x+y+|x-y|}{2} &= \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max\{x,y\}, \\ \frac{x+y-|x-y|}{2} &= \frac{x+y-(x-y)}{2} = \frac{2y}{2} = y = \min\{x,y\}. \end{aligned}$$

2. Fall: $x < y$. Dann ist $|x - y| = -(x - y) = -x + y$, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{x+y+|x-y|}{2} &= \frac{x+y-x+y}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max\{x,y\}, \\ \frac{x+y-|x-y|}{2} &= \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \min\{x,y\}. \end{aligned}$$