Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2011/12
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Beh.: Die Folge (a_n) ist monoton wachsend, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ gilt $a_n \geqslant a_{n-1}$.
IA ($n = 2$): Es gilt $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \geqslant \sqrt{2} = a_1$.
IS: Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$. Für dieses n gelte $a_n \geqslant a_{n-1}$ (IV). Dann folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \overset{\text{IV}}{\geqslant} \sqrt{2 + a_{n-1}} = a_n.$$

Beh.: Die Folge (a_n) ist nach oben durch 2 beschränkt, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leqslant 2$.
IA ($n = 1$): Es gilt $a_1 = \sqrt{2} \leqslant 2$.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für dieses n gelte $a_n \leqslant 2$ (IV). Dann folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \overset{\text{IV}}{\leqslant} \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Da (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, konvergiert (a_n) gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Da die Folge (a_{n+1}) eine Teilfolge von (a_n) ist, gilt auch $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ in der Rekursionsformel ergibt sich für a die Gleichung

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2 + a}.$$

Quadrieren liefert $a^2 = 2 + a$ bzw. $0 = a^2 - a - 2 = (a - 2)(a + 1)$, also $a = 2$ oder $a = -1$. Wegen $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $a \geqslant 0$. Daher ist $a = 2$ der Grenzwert von (a_n).

Aufgabe 2

a) Etwa folgende Folgen erfüllen das Verlangte:

- **i)** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- **ii)** $(b_n) = (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, \ldots)$
- **iii)** $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = (-1)^n n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- **iv)** $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = 2011 + \frac{(-1)^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- **v)** $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $e_n = 0$ für gerade n und $e_n = n$ für ungerade n.

b) **i)** Offenbar gilt

$$a_{2k} = \left(1 + (-1)^{2k}\right)^{2k} = (1 + 1)^{2k} = 2^{2k} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Also ist (a_n) nicht nach oben beschränkt. Weiter gilt

$$a_{2k+1} = \left(1 + (-1)^{2k+1}\right)^{2k+1} = (1 - 1)^{2k+1} = 0 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Damit ist 0 ein Häufungswert der Folge (a_n). Weitere Häufungswerte von (a_n) gibt es nicht, denn zu jedem anderen Punkt kann man eine so kleine Umgebung wählen, dass nur endlich viele Folgenglieder a_n in ihr liegen.
Bemerkung: Es sind $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0$ und $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n) = \infty$.

ii) Wegen $1 + 1/2^n \to 1$ und $2 + (n + 1)/n = 2 + 1 + 1/n \to 3$ für $n \to \infty$ ergeben sich hier die drei Häufungswerte 1, 2 und 3.
Bemerkung: Es gilt $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n) = 1$ und $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n) = 3$.

Aufgabe 3

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Im allgemeinen folgt aus der Konvergenz von $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ nicht die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ist etwa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = (-1)^n$. Dann sind $a_{2k} = 1$ und $a_{2k+1} = -1$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Daher konvergieren die beiden Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ für $k \to \infty$. Jedoch ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, weil $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zwei verschiedenen Häufungswerte -1 und 1 besitzt.

b) Seien $a \in \mathbb{C}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Behauptung:

(a_n) konvergiert gegen a $\iff$ (a_{2k}) und (a_{2k+1}) konvergieren mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = a$.

“$\Longrightarrow$”: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen a. Da dann auch jede Teilfolge von (a_n) gegen a konvergiert, sind die beiden Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ von (a_n) konvergent und es gilt $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = a$ und $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = a$.

“$\Longleftarrow$”: Nun seien die beiden Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gelte $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = a$. Zu zeigen ist, dass dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wegen $a_{2k} \to a$ für $k \to \infty$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{2k} - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geqslant n_0,$$

woraus

$$|a_m - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle geraden } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \geqslant 2n_0$$

folgt. Wegen $a_{2k+1} \to a$ für $k \to \infty$ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{2k+1} - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geqslant n_1,$$

woraus

$$|a_m - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle ungeraden } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \geqslant 2n_1 + 1$$

folgt. Demnach gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geqslant \max\{2n_0, 2n_1 + 1\}$

$$|a_m - a| < \varepsilon,$$

d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und zwar gegen a.

Aufgabe 4

a) Wir betrachten zunächst die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} := ((1-\frac{1}{n})^{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$. Wie in der 7. Saalübung gesehen, gilt $(1 - \frac{1}{n})^n \to \frac{1}{e}$ für $n \to \infty$. Wegen $2 \leqslant e \leqslant 3$ ist $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{e} \leqslant \frac{1}{2}$. Darum gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{3} \leqslant (1 - \frac{1}{n})^n \leqslant \frac{1}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0$. Mit Aufgabe 2 d), 4. Übungsblatt, folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant (1 - \frac{1}{n})^{n^2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Wegen $(\frac{1}{3})^n \to 0$ und $(\frac{1}{2})^n \to 0$ liefert das Sandwichkriterium $(1 - \frac{1}{n})^{n^2} \to 0$ für $n \to \infty$.

Wir untersuchen nun die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\sqrt[n]{n^{2011} + n} - (1 - \frac{1}{n^2})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und bemerken zunächst, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n^{2011} \leqslant n^{2011} + n \leqslant n^{2011} + n^{2011} = 2n^{2011}$$

und

$$\sqrt[n]{n^{2011}} \leqslant \sqrt[n]{n^{2011} + n} \leqslant \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n^{2011}}\,.$$

Aufgrund von $\sqrt[n]{n} \to 1$ ergibt sich nach den Grenzwertsätzen $\sqrt[n]{n^{2011}} = (\sqrt[n]{n})^{2011} \to 1^{2011} = 1$ $(n \to \infty)$. Da zudem $\sqrt[n]{2} \to 1$ $(n \to \infty)$ gilt, folgt mit dem Sandwichkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{2011} + n} = 1\,.$$

Wie zuvor gesehen, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{3} \leqslant (1 - \frac{1}{n})^n \leqslant \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0$. Insbesondere gibt es dann ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{3} \leqslant (1 - \frac{1}{n^2})^{n^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_1$. Dann gilt

$$\sqrt[n]{\frac{1}{3}} \leqslant \underbrace{\sqrt[n]{(1 - \frac{1}{n^2})^{n^2}}}_{=(1-\frac{1}{n^2})^n} \leqslant \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_1$. Darum folgt wegen $\sqrt[n]{\frac{1}{3}} \to 1$ $(n \to \infty)$ und $\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \to 1$ $(n \to \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n^2})^n = 1.$$

Somit ist die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} c_n = 1 - 1 = 0$.

Fazit: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt die beiden konvergenten Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (b_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}} = (c_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$. Ferner gilt $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 0 = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1}$. Nach Aufgabe 3 b) konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0.

b) Sei $a > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$a_n = \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = \frac{1 - a^{-2n}}{1 + a^{-2n}} = \frac{a^{2n} - 1}{a^{2n} + 1}\,.$$

1. Fall: $a \in (0, 1)$. Aufgrund von $a^2 \in (0, 1)$ ist $a^{2n} = (a^2)^n \to 0$ $(n \to \infty)$, woraus

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{2n} - 1}{a^{2n} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

folgt.

2. Fall: $a = 1$. Hier ergibt sich $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ist.

3. Fall: $a \in (1, \infty)$. Wegen $a^2 > 1$ ist $0 < \frac{1}{a^2} < 1$. Daher gilt $a^{-2n} = (\frac{1}{a^2})^n \to 0$ $(n \to \infty)$ und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - a^{-2n}}{1 + a^{-2n}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

Aufgabe 5

Zunächst betrachten wir den Fall $a = 0$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ müssen wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so finden, dass $|\frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0$ gilt.
Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geqslant m\,. \tag{$*$}$$

Mit diesem festen m gilt dann

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} a_k \xrightarrow{n\to\infty} 0\,,$$

denn die hier auftretende Summe ist von n unabhängig.

Aus dieser Konvergenz folgt wiederum, dass ein $n_1 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} a_k\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geqslant n_1 \,. \tag{$**$}$$

Setzen wir $n_0 := \max\{m, n_1\}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0$ wegen der Dreiecksungleichung

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} a_k\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leqslant \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} a_k\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \,.$$

Wegen $n \geqslant n_1$ und $(**)$ sowie wegen $n \geqslant m$ und $(*)$ folgt

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,.$$

Damit ist die Behauptung im Falle $a = 0$ bewiesen.

Im Fall $a \neq 0$ kann man die durch $b_n := a - a_n$ definierte Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten. Wegen $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$ folgt mit dem schon Bewiesenen

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k \xrightarrow{n\to\infty} 0 \,,$$

und wegen

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a - a_k) = a - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

impliziert dies $\frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n) \to a$ $(n \to \infty)$, so dass auch der allgemeine Fall erledigt ist.

Aufgabe 6

a) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{(-2)^{3k-1}}{3^{2k+1}} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{(-2)^{3k}}{3^{2k}} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{((-2)^3)^k}{(3^2)^k} = -\frac{1}{6}\cdot\Big(-\frac{8}{9}\Big)^k.$$

Daher ergibt sich mit Hilfe der geometrischen Summenformel für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$s_N = \sum_{k=1}^{N}\frac{(-2)^{3k-1}}{3^{2k+1}} = -\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N}\Big(-\frac{8}{9}\Big)^k = -\frac{1}{6}\left[\sum_{k=0}^{N}\Big(-\frac{8}{9}\Big)^k - 1\right] = -\frac{1}{6}\left[\frac{1-(-8/9)^{N+1}}{1-(-8/9)} - 1\right].$$

Wegen $|-8/9| < 1$ ist $(-8/9)^{N+1} \to 0$ $(N \to \infty)$. Also konvergiert $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ gegen

$$-\frac{1}{6}\left[\frac{1-0}{1-(-8/9)} - 1\right] = -\frac{1}{6}\left[\frac{9}{9+8} - \frac{17}{17}\right] = \frac{4}{51} \,.$$

b) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt mit Hilfe von Aufgabe 2 a) vom 4. Übungsblatt

$$s_N = \sum_{k=0}^{N}\frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{N}\frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{(N+1)!} \xrightarrow{N\to\infty} 1 \,.$$

Folglich konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}$ und hat den Wert 1.

c) Nach dem binomischen Satz gilt für jedes $m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{m+k} = \Big(\frac{1}{2}\Big)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\Big(\frac{1}{2}\Big)^k\cdot 1^{m-k} = \Big(\frac{1}{2}\Big)^m\Big(1+\frac{1}{2}\Big)^m = \Big(\frac{3}{4}\Big)^m.$$

Daher liegt eine geometrische Reihe vor; wegen $|\frac{3}{4}| < 1$ ist sie konvergent und hat den Wert

$$\lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty}\sum_{m=0}^{N}\Big(\frac{3}{4}\Big)^m = \sum_{m=0}^{\infty}\Big(\frac{3}{4}\Big)^m = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4 \,.$$