Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl
WS 2011/12

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $f\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $x \mapsto \sin(x)$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass f bijektiv ist. Die (damit existierende) Umkehrabbildung von f heißt *Arcussinus* und wird mit arcsin bezeichnet.

Die Funktion g geht aus f durch Verschieben um 2π nach rechts hervor, h durch Spiegeln an der Geraden $x = -\frac{\pi}{2}$. Da f bijektiv ist, sind es g und h auch. Deshalb existieren g^{-1} und h^{-1}.

Für jedes $x \in [\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi]$ gilt aufgrund der 2π-Periodizität des Sinus

$$y := g(x) = \sin x = \sin(\underbrace{x - 2\pi}_{\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}) = f(x - 2\pi).$$

Daher sind $x = g^{-1}(y)$ und $x - 2\pi = f^{-1}(y)$, woraus $g^{-1}(y) = f^{-1}(y) + 2\pi$ folgt. Also

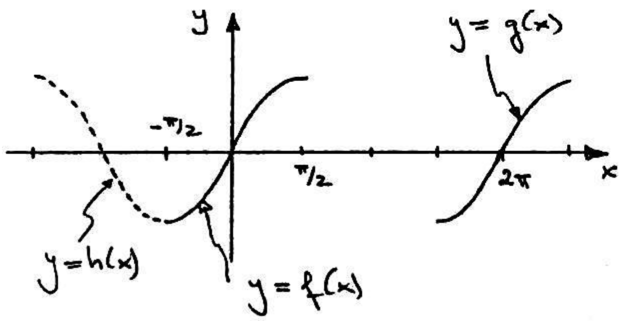
$$g^{-1}\colon [-1, 1] \to [\tfrac{3}{2}\pi, \tfrac{5}{2}\pi], \quad y \mapsto \arcsin(y) + 2\pi.$$

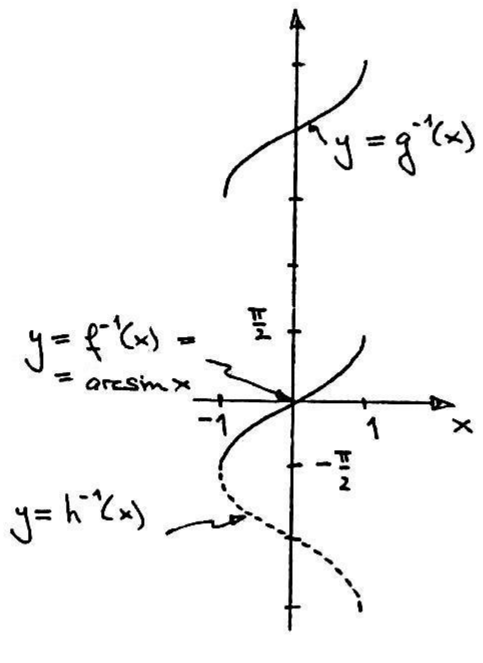
Für $x \in [-\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi]$ erhalten wir

$$y := h(x) = \sin x \overset{(*)}{=} -\sin(\underbrace{x + \pi}_{\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}) = -f(x + \pi).$$

[Die Gleichheit in $(*)$ folgt aus geometrischen Überlegungen oder mit Hilfe des Additionstheorems: $\sin(x+\pi) = \sin(x)\cos(\pi) + \cos(x)\sin(\pi) = -\sin x$.] Also ist einerseits $x = h^{-1}(y)$ und andererseits $x + \pi = f^{-1}(-y)$. Zusammen folgt $h^{-1}(y) = f^{-1}(-y) - \pi = -f^{-1}(y) - \pi$, weil f^{-1} eine ungerade Funktion ist, denn für $y = f(x)$ gilt $f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) \overset{f \text{ ungerade}}{=} f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y)$. Also

$$h^{-1}\colon [-1, 1] \to [-\tfrac{3}{2}\pi, -\tfrac{1}{2}\pi], \quad y \mapsto -\arcsin(y) - \pi.$$





Aufgabe 2

a) Um Real- und Imaginärteil von z_1 zu ermitteln, betrachtet man am besten die Polarkoordinaten von $1 - i\sqrt{3}$. Der Betrag dieser Zahl lautet

$$\left|1 - i\sqrt{3}\,\right| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\,\right)^2} = \sqrt{4} = 2\,,$$

und nun gilt es noch, das Argument von $1 - i\sqrt{3}$ zu finden, d.h. $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit

$$1 - i\sqrt{3} = 2e^{i\varphi} = 2\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)\,, \qquad \text{also} \qquad \cos\varphi = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,.$$

Dies ist genau für $\varphi = -\frac{1}{3}\pi$ der Fall; damit ist $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$. Es folgt

$$z_1 = \left(1 - i\sqrt{3}\,\right)^{42} = \left(2e^{-i\pi/3}\right)^{42} = 2^{42}e^{42(-i\pi/3)} = 2^{42}e^{-14\pi i} = 2^{42}\,,$$

denn $e^{-14\pi i} = (e^{2\pi i})^{-7} = 1^{-7} = 1$. Somit sind $\operatorname{Re} z_1 = 2^{42}$, $\operatorname{Im} z_1 = 0$, $|z_1| = 2^{42}$ und $\arg z_1 = 0$.

Wie zuvor gesehen, ist $1 \pm \sqrt{3}i = 2e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$. Damit erhalten wir

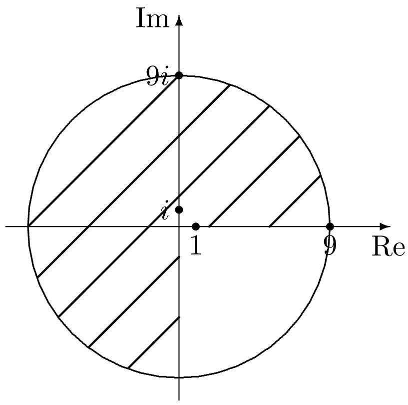
$$z_2 \;=\; \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right)^{201} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{201} = e^{i\frac{2\pi}{3}\cdot 201} = e^{134\,i\pi} = \cos\left(134\pi\right) + i\sin\left(134\pi\right) = 1\,.$$

Also sind $\operatorname{Re} z_2 = 1$, $\operatorname{Im} z_2 = 0$, $|z_2| = 1$ und $\arg z_2 = 0$.

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\left\{z^2 \mid z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \text{ mit } |z| < 3 \text{ und } \arg(z) \in (0, \tfrac{3}{4}\pi)\right\}\\
&= \left\{z^2 \mid z = re^{i\varphi} \text{ für ein } r \in (0,3) \text{ und } \varphi \in (0, \tfrac{3}{4}\pi)\right\}\\
&= \left\{r^2e^{2i\varphi} \mid r \in (0,3) \text{ und } \varphi \in (0, \tfrac{3}{4}\pi)\right\}\\
&= \left\{\varrho e^{i\theta} \mid \varrho \in (0,9) \text{ und } \theta \in (0, \tfrac{3}{2}\pi)\right\}\\
&= \left\{w \in \mathbb{C} \mid |w| \in (0,9) \text{ und } (\operatorname{Re} w < 0 \text{ oder } \operatorname{Im} w > 0)\right\}.
\end{aligned}$$

Also ist die gesuchte Menge die offene Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius 9 ohne den vierten Quadranten, ohne die positive reelle Achse, ohne die negative imaginäre Achse und ohne den Ursprung. Skizze:



c) Es sei $t \in (0, 2\pi)$. Wegen $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi$ für $\varphi \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$z(t) = 1 - e^{it} = \left(e^{-it/2} - e^{it/2}\right)e^{it/2} = -2i\sin(t/2)\,e^{it/2} = 2\sin(t/2)\,e^{i(t-\pi)/2}\,,$$

wobei für die letzte Umformung $-i = e^{-i\pi/2}$ verwendet wurde. Damit haben wir bereits die gesuchte Polardarstellung von $z(t)$ gefunden, denn für alle $t \in (0, 2\pi)$ gilt $\sin(t/2) > 0$ und $\frac{1}{2}(t - \pi) \in (-\pi, \pi]$. Also hat $z(t)$ den Betrag $2\sin(t/2)$ und das Argument $\frac{1}{2}(t - \pi)$.

d) Wir haben

$$z = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\Big(\frac{5\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(\frac{5\pi}{4}\Big) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2},$$

$$z^3 = e^{i\frac{15\pi}{4}} = \cos\Big(\frac{15\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(\frac{15\pi}{4}\Big) = \cos\Big(\frac{7\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(\frac{7\pi}{4}\Big) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2}$$

und

$$z^{150} = e^{i\frac{750\pi}{4}} = \cos\Big(\frac{750\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(\frac{750\pi}{4}\Big) = \cos\Big(\frac{3\pi}{2}\Big) + i\sin\Big(\frac{3\pi}{2}\Big) = -i,$$

weil $750 = 93 \cdot 8 + 6$ und somit $\frac{750\pi}{4} = 93 \cdot 2\pi + \frac{6\pi}{4}$ ist.

Aufgabe 3

a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x+y \notin \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x\, \cos y + \sin y\, \cos x}{\cos x\, \cos y - \sin x\, \sin y} = \frac{\cos x\, \cos y\,(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y})}{\cos x\, \cos y\,(1 - \frac{\sin x\, \sin y}{\cos x\, \cos y})} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\, \tan y}\,.$$

b) Gemäß Vorlesung ist $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, stetig und bijektiv. Die Umkehrfunktion von tan heißt *Arcustangens* $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$. Also gilt

$$\begin{aligned} \arctan(\tan(x)) &= x \qquad &&\text{für alle } x \in (-\pi/2, \pi/2),\\ \tan(\arctan(y)) &= y \qquad &&\text{für alle } y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nun seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2}$. Wir setzen $X := \arctan(x), Y := \arctan(y)$. Mit Hilfe der Identität $\tan(X+Y) = \frac{\tan X + \tan Y}{1 - \tan X\, \tan Y}$ aus Teil a) erhalten wir

$$X + Y = \arctan\big(\tan(X+Y)\big) = \arctan\Big(\frac{\tan X + \tan Y}{1 - \tan X\, \tan Y}\Big) = \arctan\Big(\frac{x+y}{1-xy}\Big)\,.$$

c) Für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cosh y + \sinh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{2e^y}{2} = e^y\,.$$

Damit ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$(\cosh x + \sinh x)^n = (e^x)^n = e^{nx} = \cosh(nx) + \sinh(nx)\,.$$

d) Für jedes $x \in (-1, 1)$ gilt $y = \operatorname{Artanh} x$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} x = \tanh y = \frac{\sinh y}{\cosh y} = \frac{\frac{1}{2}(e^y - e^{-y})}{\frac{1}{2}(e^y + e^{-y})} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \quad &\iff \quad e^{2y}(x-1) = -1 - x\\ \iff \quad e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \quad \iff \quad 2y = \ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big) \quad &\iff \quad y = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Zunächst sei $n \in \mathbb{N}$. Alle Funktionen f_n sind stetig an der Stelle 0, denn für $x \neq 0$ gilt

$$|f_n(x)| = |x^n \sin(x^{-1})| \leqslant |x|^n\,,$$

woraus $f_n(x) \xrightarrow{x \to 0} 0 = f_n(0)$ folgt.
Die Funktion f_n ist differenzierbar in 0, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^n \sin(x^{-1}) - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x^{n-1}\sin(x^{-1})$$

existiert. Für $n \geqslant 2$ existiert dieser Grenzwert [es handelt sich dann um $\lim_{x\to 0} f_{n-1}(x) = 0$], für $n = 1$ jedoch nicht: Für die Folge $(x_k)_k := ((\frac{\pi}{2} + k\pi)^{-1})_k$ gilt nämlich $x_k \to 0$ $(k \to \infty)$, aber

$$\frac{f_1(x_k) - f_1(0)}{x_k - 0} = \sin(x_k^{-1}) = \sin(\tfrac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k$$

konvergiert für $k \to \infty$ nicht.
Wegen $f_0(x) = \sin(x^{-1})$ für $x \neq 0$ zeigt diese Überlegung außerdem, dass f_0 nicht stetig in 0 ist. Damit ist f_0 erst recht nicht differenzierbar in 0.

Aufgabe 5

Seien $\alpha > 1$, $C > 0$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $|f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x-y|^\alpha$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir zeigen, dass f in x_0 differenzierbar ist mit $f'(x_0) = 0$. Es gilt

$$0 \leqslant \lim_{x\to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leqslant \lim_{x\to x_0} \frac{C\,|x-x_0|^\alpha}{|x-x_0|} = C \lim_{x\to x_0} |x - x_0|^{\alpha-1} = 0$$

wegen $\alpha - 1 > 0$. Damit ist

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0\,,$$

d.h. f ist in x_0 differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = 0$.
Da $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig war, folgt, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6

a) Die Funktion f ist stetig auf D, falls f in jedem Punkt aus D stetig ist, d.h. nach dem ε-δ-Kriterium genau dann, wenn

$$\forall x \in D \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall y \in D: \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,.$$

Hier darf also die Zahl δ sowohl von x als auch von ε abhängen. Da in der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit der Quantor '$\forall x \in D$' erst nach dem Quantor '$\exists \delta > 0$' steht, hängt dort δ alleine von ε ab und ist unabhängig von x. Insbesondere ist eine auf D gleichmäßig stetige Funktion auch auf D stetig. Die Umkehrung gilt i.a. nicht, wie das Beispiel in b) zeigt.

b) Sei $g\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$. Wir zeigen, dass g nicht gleichmäßig stetig ist, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \exists x, y \in (0,1]: \quad |x - y| < \delta \;\text{ und }\; |g(x) - g(y)| \geqslant \varepsilon\,.$$

Setze $\varepsilon := 1$. Sei $\delta > 0$ beliebig. Wählt man $x \in (0,1]$ mit $x < 2\delta$ (etwa $x := \min\{\delta, 1\}$) und $y := \frac{1}{2}x$, dann gilt $x, y \in (0,1]$, $|x - y| = |x - \frac{1}{2}x| = \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\,2\delta = \delta$ und

$$|g(x) - g(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \right| = \frac{1}{x} \overset{x\in(0,1]}{\geqslant} 1 = \varepsilon\,.$$

c) Es sei D abgeschlossen und beschränkt und $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen dazu an, dass f nicht gleichmäßig stetig ist, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \exists x, y \in D: \quad |x - y| < \delta \;\text{ und }\; |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon\,. \tag{+}$$

Wir wählen $\varepsilon > 0$ gemäß (+). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ finden wir dann (zu $\delta = \frac{1}{n}$) Punkte $x_n, y_n \in D$ mit $|x_n - y_n| < 1/n$ $(*)$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$ $(**)$. Da D beschränkt ist, hat die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Da D abgeschlossen ist, liegt ihr Grenzwert $x_0 := \lim_{n\to\infty} x_{k(n)}$ wieder in D. Wegen $(*)$ gilt $x_{k(n)} - y_{k(n)} \to 0$ und damit $y_{k(n)} = x_{k(n)} - (x_{k(n)} - y_{k(n)}) \to x_0$ für $n \to \infty$. Es folgt

$$0 = |f(x_0) - f(x_0)| = |f(\lim_{n\to\infty} x_{k(n)}) - f(\lim_{n\to\infty} y_{k(n)})| \overset{f \text{ stetig}}{=} \lim_{n\to\infty} |f(x_{k(n)}) - f(y_{k(n)})| \overset{(**)}{\geqslant} \varepsilon$$

im Widerspruch zu $\varepsilon > 0$. Deshalb ist die getroffene Annahme falsch und f gleichmäßig stetig.

Da $(0,1]$ nicht abgeschlossen ist (denn: $\frac{1}{n} \in (0,1]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, aber $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \notin (0,1]$), lässt sich die Aussage aus Teil c) nicht auf die Funktion g aus Teil b) anwenden.