Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt

WS 2012/13

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 7

a) **i)** Wir argumentieren mit Hilfe von Kontraposition und zeigen die äquivalente Aussage: Falls f nicht injektiv ist, dann ist auch $h := g \circ f$ nicht injektiv.

Sei dazu $f\colon X \to Y$ nicht injektiv, d.h. es gibt $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ und $f(x_1) = f(x_2)$. Dann folgt aber $h(x_1) = g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) = h(x_2)$; also ist h nicht injektiv.

ii) Erneut verwenden wir Kontraposition. Sei g nicht surjektiv, d.h. $g(Y) \neq Z$, also: Es gibt ein $z \in Z$ so, dass für alle $y \in Y$ gilt: $g(y) \neq z$. Insbesondere gilt dann aber $h(x) = g\big(f(x)\big) \neq z$ für alle $x \in X$, d.h. h ist nicht surjektiv.

b) **i)** Die Funktionen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ seien bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv.

Um die Bijektivität von $h := g \circ f$ zu zeigen, müssen wir begründen, dass h sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Zuerst zeigen wir, dass h injektiv ist, dass also für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt:

$$\text{Aus } x_1 \neq x_2 \text{ folgt } h(x_1) \neq h(x_2).$$

Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ beliebig. Zu zeigen ist $h(x_1) \neq h(x_2)$.
Wegen der Injektivität von f gilt dann $f(x_1) \neq f(x_2)$. Wegen der Injektivität von g folgt daraus aber $g\big(f(x_1)\big) \neq g\big(f(x_2)\big)$, und nach Definition der Komposition bedeutet dies gerade $h(x_1) \neq h(x_2)$.
Jetzt müssen wir noch die Surjektivität von h zeigen; diese folgt aus der Surjektivität von f und g. Zu zeigen ist $h(X) = Z$, also:

$$\text{Zu jedem } z \in Z \text{ existiert ein } x \in X \text{ mit } h(x) = z.$$

Sei dazu $z \in Z$ beliebig. Nun müssen wir ein $x \in X$ mit $h(x) = z$ angeben.
Da g surjektiv ist, existiert zu z ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjektiv ist, gibt es zu diesem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Es folgt:

$$h(x) = g\big(f(x)\big) = g(y) = z.$$

ii) Es seien $h = g \circ f$ surjektiv und g injektiv. Wir wollen zeigen, dass dann f surjektiv ist.
Sei dazu $y \in Y$ beliebig. Nun müssen wir begründen, warum es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt. Da $h\colon X \to Z$ surjektiv ist, existiert zu $g(y) \in Z$ ein $x \in X$ mit

$$g(y) = h(x) = g\big(f(x)\big).$$

Wegen der Injektivität von g folgt hieraus $y = f(x)$ und damit die Surjektivität von f.

Aufgabe 8

a) **(i)** Auch hier muss man wieder zwei Richtungen beweisen. Sei zunächst f injektiv und $x_0 \in X$ ein beliebiges fest gewähltes Element von X. Für $y \in f(X)$ wählen wir $x = g(y)$ so, dass $f(x) = y$. Falls aber $y \in Y/f(X)$, so setzen wir $g(y) = x_0$. Wir müssen nun zeigen, dass $g \circ f = id_X$. Sei also $x \in X$. Dann gilt $y = f(x) \in f(Y)$ und aufgrund unserer Wahl von g und da f injektiv ist gilt $g \circ f = id_X$. Damit habe wir gezeigt, dass

f eine Linksinverse hat, wenn f injektiv ist. Wir müssen noch zeigen, dass f injektiv ist, wenn f in Linksinverse g hat. Aber in diesem Fall ist $g \circ f = id_x$, also insbesondere injektiv. Aus Aufgabe 7, Teil a (i) folgt damit, dass auch f injektiv ist.

(ii) Auch hier kann aus Aufgabe 7, Teil a ii) schließen, dass f surjektiv ist, wenn es eine Rechtsinverse gibt. Wir müssen also nur eine Rechtsinverse konstruieren, wenn f surjektiv ist. Sei also f surjektiv, d.h. zu beliebigen $y \in Y$ gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Wir wählen also zu $y \in Y$ ein $x \in f^{-1}(\{y\})$ und setzen $g(y) := x$. Dann gilt $(f \circ g)(y) = y$ und wir sind fertig.

b) Wir werden sehen, dass die Aussage sogar ganz allgemein für Abbildungen

$$f : \{0, 1, 2, \dots n\} \to \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

gilt.

"$\Rightarrow$": Sei f injektiv. Betrachte die Bildmenge $B := f(\{1, 2, \dots, n\}) = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$ von f. Wir behaupten, dass diese n verschiedene Elemente enthält. Falls nämlich B aus weniger als n Elementen bestünde, müsste es zwei verschiedene Elemente $x_1, x_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$ geben mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dies steht aber im Widerspruch zur Injektivität von f, so dass solche x_1, x_2 nicht existieren. Also enthält B tatsächlich n verschiedene Elemente und wegen $B \subset \{1, 2, \dots, n\}$ muss $B = \{1, 2, \dots, n\}$ gelten. Also ist f surjektiv.

"$\Leftarrow$": Hier müssen wir folgende Implikation begründen: Falls f surjektiv ist, so ist f injektiv. Diese schreiben wir mittels Kontraposition äquivalent um: Falls f nicht injektiv ist, so ist f nicht surjektiv. Um die letzte Aussage einzusehen, setzen wir voraus, dass f nicht injektiv ist. Darum gibt es $x_1, x_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $x_1 \neq x_2$ und $f(x_1) = f(x_2)$. Hieraus folgt, dass $f(\{1, 2, \dots, n\}) = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$ weniger als n (verschiedene) Elemente enthält und somit $f(\{1, 2, \dots, n\}) \neq \{1, 2, \dots, n\}$ gilt. Das bedeutet, dass f nicht surjektiv ist.

Aufgabe 9

a) f_1 ist injektiv, denn für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gilt

$$f_1(x) = f_1(y) \quad \Rightarrow \quad x = y\,.$$

f_1 ist auch surjektiv. Um dies zu begründen, müssen wir zeigen, dass es zu jedem $y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ein $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gibt mit $f_1(x) = y$. Sei dazu $y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Ist $x := y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gesetzt, so gilt $f_1(x) = y$.

Da f_1 sowohl injektiv als auch surjektiv ist, ist f_1 bijektiv. Daher existiert die Umkehrfunktion $f_1^{-1} \colon \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ von f_1. Zur Berechnung von f_1^{-1} lösen wir die Gleichung $f_1(x) = y$ nach x auf (hier sind $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, y \in f_1(\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$): $f_1(x) = y \;\Leftrightarrow\; x = y$. Also ist $f_1^{-1} \colon \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $y \mapsto y$.

Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gilt

$$f_2(x) = 1 + \frac{x}{1 - x} = \frac{1 - x + x}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}\,.$$

f_2 ist injektiv, denn für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ergibt sich

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad x - 1 \neq y - 1 \quad \overset{x,y \neq 1}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{x - 1} \neq \frac{1}{y - 1} \quad \Rightarrow \quad f_2(x) \neq f_2(y)\,.$$

f_2 ist auch surjektiv: Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Für $x := 1 - \frac{1}{y} \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gilt

$$f_2(x) = \frac{1}{1 - (1 - \frac{1}{y})} = \frac{1}{1 - 1 + \frac{1}{y}} = y\,.$$

Insgesamt haben wir gezeigt, dass f_2 bijektiv ist und daher die Umkehrfunktion f_2^{-1} existiert. Dem Beweis der Surjektivität von f_2 entnehmen wir $f_2^{-1}\colon \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \to \mathbb{R}\setminus\{0,1\}, y \mapsto 1 - \frac{1}{y}$.

Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ gilt $f_3(x) = 1 - \frac{1}{x} = f_2^{-1}(x)$. Also sind f_3 und f_2^{-1} identisch. Da f_2^{-1} bijektiv ist, gilt das selbe auch für f_3. Außerdem ergibt sich $f_3^{-1} = f_2$.

b) Da f_1 die Identität auf $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ ist, gilt $f_1 \circ f_k = f_k$ für alle $k \in \{1,2,3\}$ und $f_j \circ f_1 = f_j$ für alle $j \in \{1,2,3\}$. Ferner erhalten wir wegen $f_2 = f_3^{-1}$ und $f_3 = f_2^{-1}$ für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

$$(f_3 \circ f_2)(x) = f_3(f_2(x)) = f_3(f_3^{-1}(x)) = x = f_1(x)\,,$$
$$(f_2 \circ f_3)(x) = f_2(f_3(x)) = f_2(f_2^{-1}(x)) = x = f_1(x)\,,$$

d.h. $f_3 \circ f_2 = f_1$ und $f_2 \circ f_3 = f_1$. Überdies erkennen wir für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

$$(f_2 \circ f_2)(x) = f_2(f_2(x)) = \frac{1}{1-f_2(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{1-x-1} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} = f_3(x)\,,$$
$$(f_3 \circ f_3)(x) = f_3(f_3(x)) = 1 - \frac{1}{f_3(x)} = 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 - \frac{x}{x-1} = \frac{x-1-x}{x-1} = \frac{1}{1-x} = f_2(x)\,,$$

d.h. $f_2 \circ f_2 = f_3$ und $f_3 \circ f_3 = f_2$.

Aufgabe 10

a) {0,1,2,3} ist höchstens abzählbar, aber nicht abzählbar. Eine surjektive Abbildung erhält man zum Beispriel in dem man $f(n) = n-1$ für $n \in \{1,2,3,4\}$ und $f(n) = 0$ für $n > 4$ setzt.

b) Bei Teilmengen der natürlichen Zahlen ist es etwas komplizierter: endliche Teilmengen sind höchstens abzählbar, unendliche sogar abzählbar. Um letzteres einzusehen, betrachten wir eine Teilmenge M mit unendlich vielen Elementen. Intuitiv zählt man dann die Elemente einfach ab: Die 1 bildet man auf das kleinste Element ab die 2 auf das zweitkleinste, usw..(Mathematisch rigoros können wir das leider noch nicht machen: Dazu müssten wir etwas genauer wissen, was genau die natürlichen Zahlen sind.)

c) Die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar. Um eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zu erhalten, stellen wir uns $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als Gitter vor. Die Punkte numerieren wir nun längs des im folgendem Gitter gemalten Streckenzuges:

$$\begin{tikzcd}
\vdots & & & & & \\
(0,4) & \cdots & & & & \\
(0,3) \arrow[dr] & (1,3) \arrow[ul] & \cdots & & & \\
(0,2) \arrow[u] & (1,2) \arrow[dr] & (2,2) \arrow[ul] & \cdots & & \\
(0,1) \arrow[dr] & (1,1) \arrow[ul] & (2,1) \arrow[dr] & (3,1) \arrow[ul] & \cdots & \\
(0,0) \arrow[u] & (1,0) \arrow[r] & (2,0) \arrow[ul] & (3,0) \arrow[r] & (4,0) \arrow[ul] & \cdots
\end{tikzcd}$$

d) Jede rationale Zahl lässt sich eindeutig als Bruch zweier teilerfremder Zahlen $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ darstellen. Wir nutzen dies, um wie in der letzten Teilaufgabe jeder rationalen Zahl einen Punkt in einem ebenen Gitter zuzuordnen. Diese Punkte numerieren wir längs des folgenden Streckenzuges, wobei wir die Paare (m, n) überspringen, bei denen m und n nicht teilerfremd sind.

$$
\begin{tikzcd}
& -\frac{3}{4} \arrow[d] & -\frac{2}{4} \arrow[l] & -\frac{1}{4} \arrow[l] & \frac{0}{4} \arrow[l] & \frac{1}{4} \arrow[l] & \frac{2}{4} \arrow[l] & \frac{3}{4} \arrow[l] \\
& -\frac{3}{3} \arrow[d] & -\frac{2}{3} \arrow[r] & -\frac{1}{3} \arrow[r] & \frac{0}{3} \arrow[r] & \frac{1}{3} \arrow[r] & \frac{2}{3} \arrow[d] & \frac{3}{3} \arrow[u] \\
& -\frac{3}{2} \arrow[d] & -\frac{2}{2} \arrow[u] & -\frac{1}{2} \arrow[d] & \frac{0}{2} \arrow[l] & \frac{1}{2} \arrow[l] & \frac{2}{2} \arrow[d] & \frac{3}{2} \arrow[u] \\
{} & -3 \arrow[l] & -2 \arrow[u] & -1 \arrow[l] & \frac{0}{1} \arrow[r] & \frac{1}{1} \arrow[u] & \frac{2}{1} \arrow[r] & \frac{3}{1} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Das erzeugt eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 11

Lassen Sie uns in dieser Aufgabe die Anzahl von Elementen in einer Menge A mit $\#A$ bezeichnen.

a) Wieder beweisen wir die Aussage durch Kontraposition. Sei $f : \{0, 1, \ldots, n\} \to \{0, 1, \ldots, m\}$ eine Funktion, für die $f(n_1) \neq f(n_2)$ für jeweils unterschiedliche $n_1, n_2 \in \{0, 1, \ldots n\}$. Damit ist die Abbildung injektiv und es gilt

$$n + 1 = \#f(\{0, 1, \ldots, n\}) \leqslant \#\{0, 1, \ldots, m\} = m + 1$$

also $m \geqslant n$. Mit Hilfe der Kontraposition erhält man also, dass im Falle $n > m$ die Funktion f nicht injektiv sein kann. Das ist genau die Aussage des Dirichlet'schen Schubfachprinzips.

b) Wir betrachten die Abbildung f, die den dreizehn Personen ihren Geburtsmonat zuordnet. Dann folgt aus dem Dirichlet'schen Schubfachprinizip, dass diese Abbildung nicht injektiv ist, d.h. dass zwei Menschen im selben Monat Geburtstag haben. Genau so sieht man, dass man 366 Menschen betrachten muss, damit mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben.

Damit mindestens n Menschen am selben Tag Geburtstag haben, muss man mindestens eine Gruppe von $(n - 1) \cdot (\text{Tage im Jahr}) + 1$ Menschen betrachten. Um das einzusehen, nehmen wir an, dass an keinem Tage mehr als $n - 1$ Menschen Geburtstag haben. Dann ist die Anzahl der Menschen kleiner gleich $(n - 1) \cdot (\text{Anzahl der Tage im Jahr})$. Wieder liefert also die Kontraposition das gewünschte Ergebnis.

Analog dazu muss man eine Gruppe von mindestens $12 \cdot (n - 1) + 1$ Menschen betrachten, damit mindestens n dieser Menschen im selben Monat Geburtstag haben.