Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt

WS 2012/13

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektrotechnik und Informationstechnik**

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 12

a) Wegen

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{für } x+1 \geqslant 0 \\ -(x+1) & \text{für } x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1 & \text{für } x \geqslant -1 \\ -x-1 & \text{für } x < -1 \end{cases}$$

und

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{für } x-4 \geqslant 0 \\ -(x-4) & \text{für } x-4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-4 & \text{für } x \geqslant 4 \\ -x+4 & \text{für } x < 4 \end{cases}$$

führen wir die Fallunterscheidung $x \in (-\infty, -1)$, $x \in [-1, 4)$, $x \in [4, \infty)$ durch, um die Beträge aufzulösen.

1. Fall: $x \in (-\infty, -1)$. Es gilt

$$|x-4| = |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad -(x-4) = -(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad -x+4 = -x-1 \quad \Leftrightarrow \quad 4 = -1.$$

Dies ist falsch. Daher ist die gegebene Gleichung für kein $x \in (-\infty, -1)$ erfüllt.

2. Fall: $x \in [-1, 4)$. Es gilt

$$\begin{aligned} |x-4| = |x+1| \quad &\Leftrightarrow \quad -(x-4) = x+1 \quad \Leftrightarrow \quad -x+4 = x+1 \\ &\Leftrightarrow \quad -2x = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3/2. \end{aligned}$$

In diesem Fall ist die gegebene Gleichung genau für $x = 3/2 \in [-1, 4)$ erfüllt. [Hierbei ist zu beachten, dass man $3/2 \in [-1, 4)$ prüfen muss. Andernfalls würde man die Zahl $3/2$ in diesem Fall nicht betrachten und könnte nicht folgern, dass $3/2$ die gegebene Gleichung erfüllt.]

3. Fall: $x \in [4, \infty)$. Es gilt

$$|x-4| = |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad x-4 = x+1 \quad \Leftrightarrow \quad -4 = 1.$$

Dies ist falsch. Daher ist die gegebene Gleichung für kein $x \in [4, \infty)$ erfüllt.

Fazit: $|x-4| = |x+1| \;\Leftrightarrow\; x = 3/2$.

Alternativ führen auch geometrische Überlegungen zum Ziel: Gesucht sind diejenigen $x \in \mathbb{R}$, die denselben Abstand zu 4 wie zu -1 haben, d.h. x liegt genau in der Mitte: $x = \frac{4+(-1)}{2} = \frac{3}{2}$.

b) Die Ungleichung $|2x| > |5-2x|$ besagt im Fall $x = 0$: $0 > 5$. Dies ist falsch. Deshalb kann $|2x| > |5-2x|$ nur für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ erfüllt sein. Für solche x gilt

$$\begin{aligned} |2x| > |5-2x| \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{5-2x}{2x}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < \underbrace{\frac{5-2x}{2x}}_{=\frac{5}{2x}-1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{5}{2x} < 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2}{5}x > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

c) Es ist

$$\begin{aligned} & |2-|2-x|| \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant 2-|2-x| \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leqslant -|2-x| \leqslant -1 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 \leqslant |2-x| \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant 2-x \leqslant 3 \text{ oder } 1 \leqslant -(2-x) \leqslant 3 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 \leqslant 2-x \leqslant 3 \text{ oder } -3 \leqslant 2-x \leqslant -1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant -x \leqslant 1 \text{ oder } -5 \leqslant -x \leqslant -3 \\ \Leftrightarrow \quad & -1 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{oder} \quad 3 \leqslant x \leqslant 5 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-1, 1] \cup [3, 5]. \end{aligned}$$

d) Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Fall: $x \in (-\infty, -1)$. Mit $|x+1| = -(x+1)$ und $|x-1| = -(x-1)$ ergibt sich

$$|x+1| + |x-1| = -2x.$$

Deshalb gilt

$$|x+1| + |x-1| > 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2x > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1.$$

2. Fall: $x \in [-1, 1)$. Hier ist $|x+1| = x+1$ und $|x-1| = -(x-1)$, also

$$|x+1| + |x-1| = 2.$$

Demzufolge lautet in diesem Fall die Ungleichung: $2 > 2$. Diese ist unlösbar.

3. Fall: $x \in [1, \infty)$. Wegen $|x+1| = x+1$ und $|x-1| = x-1$ folgt

$$|x+1| + |x-1| = 2x$$

und damit

$$|x+1| + |x-1| > 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1.$$

Zusammenfassend haben wir:

$$|x+1| + |x-1| > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1 \text{ oder } x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

e) Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

1. Fall: $x < 0$. Dann ist $|x| = -x$, und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x < 4x^2(1-x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < -4x^3 + 4x^2 - 3x \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < -4x\left(x^2 - x + \frac{3}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < -4x\underbrace{\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]}_{\geqslant \frac{1}{2} > 0} \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < -4x \quad \Leftrightarrow \quad x < 0.
\end{aligned}$$

2. Fall: $x \geqslant 0$. Dann ist $|x| = x$, und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x < 4x^2(1+x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 4x^3 + 4x^2 - 3x \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < 4x\left(x^2 + x - \frac{3}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 4x\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1\right] \\
&\overset{x \geqslant 0}{\Leftrightarrow} \quad 4x > 0 \;\text{ und }\; \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x > 0 \;\text{ und }\; \left|x + \frac{1}{2}\right| > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x > 0 \;\text{ und }\; \left(x + \frac{1}{2} > 1 \;\text{ oder }\; -(x + \frac{1}{2}) > 1\right) \\
&\Leftrightarrow \quad x > 0 \;\text{ und }\; \left(x + \frac{1}{2} > 1 \;\text{ oder }\; x + \frac{1}{2} < -1\right) \\
&\Leftrightarrow \quad x > 0 \;\text{ und }\; \left(x > \frac{1}{2} \;\text{ oder }\; x < -\frac{3}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Demzufolge gilt $\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2$ genau für $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 0$ oder $x > \frac{1}{2}$.

— bitte wenden —

f) Auf keinen Fall kommt $x = 1$ in Frage, denn die Division durch 0 ist nicht definiert. Ansonsten multiplizieren wir die Ungleichung mit $1 - x$. Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: Sei zunächst $1 - x > 0$, also $x < 1$. Multiplikation mit $1 - x$ liefert

$$\begin{aligned} 2x + \frac{1}{1-x} \geqslant 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x(1-x) + 1 \geqslant 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 2x^2 + 1 \geqslant 1 - x \\ &\Leftrightarrow \quad 3x - 2x^2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(3-2x) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt genau dann, wenn $x \geqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$ oder aber wenn $x \leqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$ sind.

$x \geqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$ bedeutet $x \geqslant 0$ und $x \leqslant 3/2$, also $0 \leqslant x \leqslant 3/2$. Da wir im 1. Fall nur $x < 1$ betrachten, ergibt sich also $0 \leqslant x < 1$.

$x \leqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$ bedeutet $x \leqslant 0$ und $x \geqslant 3/2$, was nicht gleichzeitig möglich ist.

2. Fall: Jetzt sei $1 - x < 0$, also $x > 1$. Dann dreht sich bei Multiplikation mit $1 - x$ das $\geqslant$ um, und wir erhalten

$$2x + \frac{1}{1-x} \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x(1-x) + 1 \leqslant 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad x(3-2x) \leqslant 0.$$

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn $x \geqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$ oder aber wenn $x \leqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$ sind.

$x \geqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$ bedeutet $x \geqslant 0$ und $x \geqslant 3/2$, also $x \geqslant 3/2$.

$x \leqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$ bedeutet $x \leqslant 0$ und $x \leqslant 3/2$, also $x \leqslant 0$. Da wir im 2. Fall nur $x > 1$ betrachten, ist dies hier nicht möglich.

Insgesamt: Die Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn $0 \leqslant x < 1$ oder $x \geqslant 3/2$.

Aufgabe 13

a) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wegen $0 \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung!) erhalten wir

$$0 < 1 \leqslant 1 + |x + y| \leqslant 1 + |x| + |y|,$$

woraus

$$\frac{1}{1 + |x+y|} \geqslant \frac{1}{1 + |x| + |y|} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{1 + |x+y|} \leqslant -\frac{1}{1 + |x| + |y|} \tag{1}$$

folgt. Mit zweimaliger Verwendung des Tipps kommen wir auf

$$\frac{|x+y|}{1 + |x+y|} = 1 - \frac{1}{1 + |x+y|} \overset{(1)}{\leqslant} 1 - \frac{1}{1 + |x| + |y|} = \frac{|x| + |y|}{1 + |x| + |y|}.$$

Damit ist die erste behauptete Ungleichung bewiesen. Nun zur zweiten: Es gilt

$$\begin{aligned} & |x| + |y| \geqslant |x| \geqslant 0 \\ \Rightarrow \ & 1 + |x| + |y| \geqslant 1 + |x| \geqslant 1 > 0 \\ \Rightarrow \ & \frac{1}{1 + |x| + |y|} \leqslant \frac{1}{1 + |x|} \\ \overset{|x| \geqslant 0}{\Rightarrow} \ & \frac{|x|}{1 + |x| + |y|} \leqslant \frac{|x|}{1 + |x|}. \end{aligned}$$

Ebenso (vertausche x und y) bekommen wir

$$\frac{|y|}{1 + |x| + |y|} \leqslant \frac{|y|}{1 + |y|}.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{|x| + |y|}{1 + |x| + |y|} = \frac{|x|}{1 + |x| + |y|} + \frac{|y|}{1 + |x| + |y|} \leqslant \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |y|}.$$

b) Wiederum seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten die beiden Fälle $x - y \geqslant 0$ und $x - y < 0$.

1. Fall: $x \geqslant y$. Dann ist $|x-y| = x-y$, und es gilt

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max\{x,y\},$$
$$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-(x-y)}{2} = \frac{2y}{2} = y = \min\{x,y\}.$$

2. Fall: $x < y$. Dann ist $|x-y| = -(x-y) = -x+y$, und es gilt

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y-x+y}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max\{x,y\},$$
$$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \min\{x,y\}.$$

Aufgabe 14

a) Gegeben seien $x, y \in \mathbb{R}$ sowie $\varepsilon > 0$.

i) Die Aussage $0 \leqslant (\varepsilon x - y/\varepsilon)^2$ ist wahr und es gilt

$$0 \leqslant (\varepsilon x - y/\varepsilon)^2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant \varepsilon^2 x^2 - 2\varepsilon xy/\varepsilon + y^2/\varepsilon^2 \quad \Rightarrow \quad 2xy \leqslant \varepsilon^2 x^2 + y^2/\varepsilon^2.$$

ii) Unter Verwendung von i) erhalten wir

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \overset{\text{i)}}{\leqslant} x^2 + \varepsilon^2 x^2 + y^2/\varepsilon^2 + y^2 = (1+\varepsilon^2)x^2 + \Big(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\Big)y^2.$$

b) Nun seien $x, y \in (0, \infty)$.

i) Es gilt:

$$\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \overset{x,y \geqslant 0}{\Leftrightarrow} \quad x + y \leqslant x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant 2\sqrt{x}\sqrt{y}.$$

Die letzte Ungleichung ist offenkundig wahr.
Nun zur zweiten Ungleichung:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \quad &\overset{|\cdot\sqrt{x}\sqrt{y}>0}{\Leftrightarrow} \quad x\sqrt{y} + \sqrt{x}\,y \leqslant x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x\sqrt{x} - x\sqrt{y} + y\sqrt{y} - y\sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant (x-y)\big(\sqrt{x} - \sqrt{y}\big). \end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist wahr, denn:
1. Fall: $x = y$. $0 \leqslant 0$ ist wahr.
2. Fall: $x < y$. Wegen $x < y \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x} < \sqrt{y}$ ist $0 \leqslant (x-y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ wahr.
3. Fall: $x > y$. Wegen $x > y \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x} > \sqrt{y}$ folgt auch hier $0 \leqslant (x-y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})$.

ii) Es gilt

$$\big|\sqrt{x} - \sqrt{y}\big| \leqslant \sqrt{|x-y|} \quad \Leftrightarrow \quad \big(\sqrt{x} - \sqrt{y}\big)^2 \leqslant \big(\sqrt{|x-y|}\big)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leqslant |x-y|.$$

Im Fall $x \leqslant y$ ist dies äquivalent zu

$$x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leqslant y - x \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x}\big(\sqrt{x} - \sqrt{y}\big) \leqslant 0.$$

Letzteres ist wahr wegen $x \leqslant y \Rightarrow \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$.
Für $x \geqslant y$ (dies könnte man auch direkt aus obigem Fall folgern, weil der Ausdruck $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$ symmetrisch bzgl. Tausch $x \leftrightsquigarrow y$ ist) ergibt sich:

$$x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leqslant x - y \quad \Leftrightarrow \quad 2y - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{y}\big(\sqrt{y} - \sqrt{x}\big) \leqslant 0.$$

Letzteres ist wahr wegen $x \geqslant y \Rightarrow \sqrt{x} \geqslant \sqrt{y}$.

c) Wir bemerken zunächst, dass die Ungleichung $x \leqslant 4+\sqrt{x-2}$ nur für $x \geqslant 2$ sinnvoll ist. Es gilt

$$x \leqslant 4+\sqrt{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad x-4 \leqslant \sqrt{x-2}.$$

Im Fall $x \geqslant 4$ ist dies äquivalent zu (man beachte $x-4 \geqslant 0$)

$$\begin{aligned}(x-4)^2 \leqslant x-2 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2-8x+16 \leqslant x-2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-9x+18 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)(x-6) \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \big(x-3 \leqslant 0 \text{ und } x-6 \geqslant 0\big) \text{ oder } \big(x-3 \geqslant 0 \text{ und } x-6 \leqslant 0\big) \\ &\Leftrightarrow \quad \big(x-3 \geqslant 0 \text{ und } x-6 \leqslant 0\big) \quad \Leftrightarrow \quad x \in [3,6].\end{aligned}$$

Da wir nur $x \geqslant 4$ betrachtet haben, gilt $x \leqslant 4+\sqrt{x-2}$ in diesem Fall genau für $x \in [4,6]$.

Für jedes $x \in [2,4)$ gilt $x-4<0$ und, da die Wurzel nach Definition nichtnegativ ist, genügt jedes $x \in [2,4)$ der Ungleichung $x-4<0 \leqslant \sqrt{x-2}$ und somit auch $x \leqslant 4+\sqrt{x-2}$.

Insgesamt haben wir

$$x \leqslant 4+\sqrt{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in [2,6].$$

Aufgabe 15

a) Zum eine erhält man aus

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1+\frac{c}{a}}{1+\frac{d}{b}}.$$

Nun folgt aus $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$, dass $\frac{d}{b} \leqslant \frac{c}{a}$ und damit

$$\frac{1+\frac{c}{a}}{1+\frac{d}{b}} \geqslant 1.$$

Daraus erhalten wir

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1+\frac{c}{a}}{1+\frac{d}{b}} \geqslant \frac{a}{b}.$$

Um die zweite Ungleichung herzuleiten, gehen wir genau so vor. Wieder gilt

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{\frac{a}{c}+1}{\frac{b}{d}+1} \leqslant \frac{c}{d}$$

da $\frac{a}{c} \leqslant \frac{b}{d}$.

b) Es sei $A(a,b) := \frac{a+b}{2}$ das arithmetische und $G(a,b) := \sqrt{ab}$ das geometrische Mittel zweier positiver Zahlen a, b. Wir formen nun das harmonische Mittel wie folgt um

$$H(a,b) = \frac{2ab}{a+b} = \frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}}\sqrt{ab} = \frac{G(a,b)}{A(a,b)} \cdot G(a,b)$$

Aufgrund der Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel, also

$$G(a,b) \leqslant A(a,b)$$

gilt damit

$$H(a,b) \leqslant G(a,b).$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\frac{G(a,b)}{A(a,b)} = 1$ also $2\sqrt{a,b} = a+b$. Das ist aber äquivalent zu

$$0 = a - 2\sqrt{ab} + b = \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2,$$

also $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ und damit $a = b$.

Aufgabe 16

Sei $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(m,n) \mapsto 2^{m-1}(2n-1)$. Um die Bijektivität von f zu zeigen, müssen wir begründen, dass f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Beh.: f ist injektiv. Hierzu müssen wir einsehen: Für alle $(m,n),(m',n') \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ gilt

$$f(m,n) = f(m',n') \quad \Rightarrow \quad (m,n) = (m',n')\,.$$

Seien dazu $(m,n),(m',n') \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ mit $f(m,n) = f(m',n')$, d.h.

$$2^{m-1}(2n-1) = 2^{m'-1}(2n'-1)\,. \tag{2}$$

Nun ist $(m,n) = (m',n')$, also $m = m'$ und $n = n'$, zu zeigen. Es gilt

$$2^{m-m'}(2n-1) = 2^{-m'+1}\,2^{m-1}(2n-1) \overset{(2)}{=} 2^{-m'+1}2^{m'-1}(2n'-1) = 2n'-1\,.$$

Da $2n'-1$ ungerade ist, muss auch $2^{m-m'}(2n-1)$ ungerade sein. Dies ist nur für $2^{m-m'} = 1$ bzw. $m = m'$ möglich. Setzen wir $m = m'$ in (2) ein, so folgt

$$2^{m-1}(2n-1) = 2^{m-1}(2n'-1) \quad\Longleftrightarrow\quad 2n-1 = 2n'-1 \quad\Longleftrightarrow\quad n = n'\,.$$

Insgesamt haben wir $(m,n) = (m',n')$. Hiermit ist die Injektivität von f gezeigt.

Beh.: f ist surjektiv, d.h. $f(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. Wir müssen begründen, dass es zu jedem $x \in \mathbb{N}$ ein $(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ gibt mit $x = f(m,n)$.
Sei dazu $x \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach dem Hinweis existieren $a \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ und ein ungerades $b \in \mathbb{N}$ mit

$$x = 2^a b = 2^{a+1-1}\Big(2\,\frac{b+1}{2} - 1\Big)\,.$$

Setze $m := a+1$ und $n := \frac{b+1}{2}$. Dann sind $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$, weil b ungerade ist. Außerdem gilt $x = 2^{m-1}(2n-1) = f(m,n)$. Hiermit ist die Surjektivität von f bewiesen.

Beweis des Hinweises (als Bonus): Beh.: Zu jedem $x \in \mathbb{N}$ gibt es ein $a \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ und ein ungerades $b \in \mathbb{N}$ mit $x = 2^a b$.

Sei $x \in \mathbb{N}$. Betrachte die Menge $M := \{y \in \mathbb{N}\cup\{0\} :\ 2^y \text{ teilt } x\}$. Wegen $0 \in M$ ist $M \neq \emptyset$. Außerdem gilt $M \subset \{0,1,\dots,x\}$, weil $2^y > x$ für alle $y \in \mathbb{N}$ mit $y > x$ ist. Somit ist $M \subset \mathbb{N}\cup\{0\}$ eine endliche, nichtleere Menge. Daher existiert $\max M =: a$. Insbesondere teilt 2^a die Zahl x, d.h. es gibt ein $b \in \mathbb{N}$ mit $x = 2^a b$. Wäre b gerade, so existiert $c \in \mathbb{N}$ mit $b = 2c$. Dann ist $x = 2^a b = 2^{a+1}c$. Folglich teilt 2^{a+1} die Zahl x, so dass auch $a+1$ in M liegt, was aber der Maximalität von a widerspricht. Also ist die getroffene Annahme, dass b gerade ist, falsch. Das bedeutet, dass b ungerade ist.