Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt

WS 2012/13
05.11.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 17

a) Es gilt $x \leqslant \max(N)$ für alle $x \in N$. Da $M \subset N$ und $\max M \in N$ dürfen wir diese Ungleichung auch auf $x = \max(M)$ anwenden und erhalten

$$\max(M) \leqslant \max N$$

Für Minima argumentiert man anlog.

b) Auch hier wollen wir die Lösung nur für Maxima ausführen. Wir machen eine kleine Fallunterscheidung. Falls $\max(M) \leqslant \max(N)$ erhalten wir

$$x \leqslant \max(M) \leqslant \max(N) = \max\{\max(M), \max(N)\} \quad \text{für alle } x \in M$$

und

$$x \leqslant \max(N) = \max\{\max(M), \max(N)\} \quad \text{für alle } x \in N.$$

also

$$x \leqslant \max(N) = \max\{\max(M), \max(N)\} \quad \text{für alle } x \in N \cup M.$$

In diesem Fall gilt also

$$\max(M \cup N) = \max\{\max(M), \max(N)\}.$$

Falls $\max(N) \leqslant \max(M)$ vertauschen wir die Rolle von N und M um wieder in den ersten Fall zu gelangen. Damit erhalten wir auch in diesem Fall

$$\max(M \cup N) = \max(N \cup M) = \max\{\max(N), \max(M)\} = \max\{\max(M), \max(N)\}.$$

c) Es sei $a = \min(M)$, d.h. $a \in M$ und $x \geqslant a$ für alle $x \in M$. Da aber $x \geqslant a \Leftrightarrow -x \leqslant -a$, $a \in M \Leftrightarrow -a \in -M$, und $x \in M \Leftrightarrow -x \in -M$ folgt daraus, dass $-a = \max(-M)$. Also $a = -\max(-M)$.

Aufgabe 18

a) Mit quadratischer Ergänzung erkennen wir für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 - x + 2 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geqslant \frac{7}{4}.$$

Wegen $(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4} \in \{x^2 - x + 2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ folgt

$$\min\{x^2 - x + 2 \mid x \in \mathbb{R}\} = \inf\{x^2 - x + 2 \mid x \in \mathbb{R}\} = \frac{7}{4}.$$

Da $\{x^2 - x + 2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ nach oben unbeschränkt ist (Beweis?), existieren Maximum und Supremum von $\{x^2 - x + 2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ nicht.

— bitte wenden —

b) Wir erkennen sofort, dass $B := \{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt ist. In der Tat gilt $(-1)^n + \frac{1}{n} \leqslant 1 + 1 = 2$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zur Bestimmung des Supremums, also der kleinsten oberen Schranke, bemerken wir, dass der Ausdruck $(-1)^n + \frac{1}{n}$ für ungerade natürliche Zahlen $\leqslant 0$ ist. Da $(-1)^n = 1$ für gerade $n \in \mathbb{N}$ gilt und $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\} \to \mathbb{R}, n \mapsto \frac{1}{n}$ monoton fallend ist, folgern wir aus $(-1)^n + \frac{1}{n} \leqslant (-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$: $\sup B = \max B = \frac{3}{2}$.

Nun zur unteren Schranke. Wir behaupten: $\inf B = -1$.

Wir müssen uns zunächst davon überzeugen, dass -1 überhaupt eine untere Schranke von B ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt in der Tat

$$(-1)^n + \frac{1}{n} \geqslant (-1)^n \geqslant -1.$$

Nun zeigen wir, dass -1 auch die größte untere Schranke ist. Dazu nehmen wir an, dass es eine größere untere Schranke K gibt, etwa $K = -1 + \varepsilon$ mit einem $\varepsilon > 0$, und führen dies zu einem Widerspruch. Es soll also gelten

$$K \leqslant (-1)^n + \frac{1}{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da dies insbesondere für ungerade n gilt, folgt für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$

$$-1 + \varepsilon \leqslant -1 + \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon \leqslant \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad n \leqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dies kann jedoch nicht sein, weil die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt ist. Also ist die Annahme falsch, und es gilt $-1 = \inf B$.

Da $-1 \notin B$ [Annahme: $-1 \in B$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(-1)^n + \frac{1}{n} = -1 \Leftrightarrow (-1)^n + 1 = -\frac{1}{n}$. Da auf der linken Seite eine ganze Zahl steht, muss auf der rechten Seite ebenfalls eine solche stehen, so dass $n = 1$ folgt. Jedoch ist die Gleichung $(-1)^n + \frac{1}{n} = -1$ für $n = 1$ nicht erfüllt. Widerspruch!] ist, existiert das Minimum von B nicht.

c) Die Menge $C := \{x + \frac{1}{x} \mid 0 < x \leqslant 42\}$ ist nicht nach oben beschränkt. Wäre nämlich Γ eine obere Schranke von C, so müsste für alle $x \in (0, 42]$

$$x + \frac{1}{x} \leqslant \Gamma$$

gelten. Insbesondere könnten wir dann $x = \frac{1}{n} \in (0, 42]$ einsetzen und erhielten $\frac{1}{n} + n \leqslant \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Erst recht hätten wir dann $n \leqslant \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist. Somit existieren weder Supremum noch Maximum von C.

Die Menge C ist aber nach unten durch 2 beschränkt, denn für jedes $x > 0$ erhalten wir durch Multiplikation mit x

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 \geqslant 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 \geqslant 0$$

und letzteres ist offensichtlich wahr. Zudem gilt $2 \in C$ (man setze $x = 1$). Damit wissen wir: Keine Zahl > 2 kann untere Schranke von C sein. Also ist $\inf C = 2$ und wegen $2 \in C$ folgt auch $\min C = 2$.

d) Wir setzen $D := \{\frac{x^2}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R}\}$. Offenbar gilt $x^2(1 + x^2)^{-1} \geqslant 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem ist $0 \in D$ (man setze $x = 0$). Damit folgt: Infimum und Minimum von D existieren, und es ist $\inf D = \min D = 0$.

Die Menge D ist nach oben durch 1 beschränkt, denn wegen $1 + x^2 > 0$ gilt

$$\frac{x^2}{1 + x^2} \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leqslant 1 + x^2.$$

Die letzte Ungleichung ist natürlich für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Wir zeigen nun, dass 1 sogar die *kleinste* obere Schranke ist. Sei $\Gamma < 1$ beliebig; wir wollen zeigen, dass Γ keine obere Schranke von D ist. Wir müssen also ein $x \in \mathbb{R}$ finden mit

$$\frac{x^2}{1+x^2} > \Gamma.$$

Dies ist äquivalent zu

$$x^2 > \Gamma(1+x^2), \quad \text{also} \quad (1-\Gamma)x^2 > \Gamma, \quad \text{d.h.} \quad x^2 > \frac{\Gamma}{1-\Gamma}$$

und die letzte Ungleichung ist für ein hinreichend großes x (etwa für $x = \sqrt{\frac{\Gamma}{1-\Gamma}+1}$) offenbar erfüllt. Also ist $\sup D = 1$. Wegen $1 \notin D$ (Beweis?) existiert das Maximum von D nicht.

e) Definiere $E := f([0,1]) = \{f(x) \mid x \in [0,1]\}$.

Aufgrund von $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [0,1]$ und $f(1/3) = 0$ gilt $\inf E = \min E = 0$.

$\sup E$ und $\max E$ existieren nicht, weil E nicht nach oben beschränkt ist. Annahme: E ist nach oben beschränkt. Dann gibt es eine obere Schranke $\Gamma \in (1,\infty)$ mit $y \leqslant \Gamma$ für alle $y \in E$, d.h. für alle $x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ gilt $\frac{1}{x} \leqslant \Gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\Gamma} \leqslant x$ $(*)$.
Laut Vorlesung liegt zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen immer eine irrationale Zahl, d.h. für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es ein $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $a < \xi < b$. Insbesondere gibt es eine irrationale Zahl $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $0 < \xi < 1/\Gamma$. Wegen $1/\Gamma < 1$ haben wir ein $\xi \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ gefunden mit $\xi < \frac{1}{\Gamma}$. Dies steht im Widerspruch zu $(*)$. Somit ist die getroffene Annahme falsch und E tatsächlich nicht nach oben beschränkt.

Aufgabe 19

Der Beweis läuft im Wesentlichen wie der Beweis der Existenz der Wurzel aus 2 ist im Detail aber ein gutes Stück komplizierter. Da die Aussage für $k = 1$ offensichtlich ist, nehmen wir weiter an, dass $k \geqslant 2$.
Wir werden in ganz essentieller Weise die Formel

$$x^k - y^k = (x-y)(x^{k-1} + x^{k-2} \cdot y + \cdots + xy^{k-2} + y^{k-1})$$

verwenden, die wir in Aufgabe 21, a), beweisen.
Zum einen kann man aus ihr schließen, dass es zu gebenen $y \geqslant 0$ höchstens ein positives x mit $x^k = y$ gibt. Denn für zwei unterschiedliche $x_1, x_2 \geqslant 0$ ist mindestens eine positiv und es gilt

$$x_1^k - x_2^k = (x_1 - x_2)(x_1^{k-1} + x_1^{k-2} \cdot x_2 + \cdots + x_1 x_2^{k-2} + x_2^{k-1}) \neq 0,$$

da der zweite Faktor positiv und der erste nicht gleich 0 ist.
Wenden wir uns nun der Existenz der k-ten Wurzel zu. Diese ist offensichtlich für $y = 0$, deshalb werden wir für den Rest der Lösung annehmen, dass $y > 0$.
Für $y > 0$ betrachten wir die Menge $M := \{x \in \mathbb{R} : x^k < y\}$. Da $0 \in M$, ist M nicht leer. Da $(y+1)^k > y$ und damit $x < y + 1$ für alle $x \in M$ ist M nach oben beschränkt. Aufgrund des Vollständigkeitsaxioms, existiert also das Supremum dieser Menge und wir setzen

$$x = \sup M.$$

Da $0 \in M$ wissen wir, dass $x \geqslant 0$.
Wir werden nun zeigen, dass $x^k = y$, indem wir die Aussagen $x^k > y$ und $x^k < y$ zum Widerspruch führen. Nehmen wir an, dass $x^k > y$. Dann ist auch $s := x - \frac{x^k - y}{kx^{k-1}}$ eine obere Schranke, denn

$$x^k - s^k = (x-s)\left(x^{k-1} + x^{k-2}s + \cdots + xs^{k-2} + s^{k-1}\right) < k\frac{x^k - y}{kx^{k-1}}x^{k-1} < x^k - y$$

also

$$s^k > y.$$

Damit wäre s eine kleinere obere Schranke zu M als x, was im Widerspruch zur Definition von x steht.
Wäre nun $x^k < y$ so gehen wir ähnlich vor um einen Widerspruch zu erhalten. Wir setzen

$$z := x + \frac{y - x^k}{k(y+1)^{k-1}} \leqslant x + \frac{y}{y+1} \leqslant y + 1$$

(warum? Man mache eine Fallunterscheidung $x > 1$ und $x \leqslant 1$) und erhalten wie eben

$$z^k - x^k < \frac{y - x^k}{k(y+1)^{k-1}} k(y+1)^{k-1} = y - x^k$$

Also $z > x$ mit

$$z^k < y$$

und damit wäre x keine obere Schranke an M. Auch das steht im Widerspruch zur Definition von x. Damit habe wir gezeigt, dass $x^k = y$.

Aufgabe 20

Um diese Aussage zu beweisen, betrachten wir die Mengen

$$M := \sqrt{2} + \mathbb{Q} = \{\sqrt{2} + q : q \in \mathbb{Q}\}.$$

Wir werden zeigen, dass diese Menge nur aus irrationalen Zahlen besteht und dicht in $\mathbb{R}$ liegt.
Nehme wir an, dass M nicht nur aus irrationalen Zahlen besteht, d.h. dass es ein rationales $x \in M$ gibt. Dann existiert aufgrund der Definition von M eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $x = \sqrt{2} + q$. Löst man diese Gleichung nach $\sqrt{2}$ auf, so erhält man

$$\sqrt{2} = x + q.$$

Da aber x und q rational sind, wäre damit auch $\sqrt{2}$ rational, was aber nicht der Fall ist. Also war unsere Annahme falsch. Wir haben damit gezeigt, dass M nur aus irrationalen Zahlen besteht.
Seien nun $x < y$ beliebige reelle Zahlen. Wir müssen eine irrationale Zahl z finden, mit $x < z < y$. Es gilt offensichtlich $\tilde{x} = x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} = \tilde{y}$. Da wir schon wissen, dass Q dicht in $\mathbb{R}$ ist, gibt es also eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit

$$\tilde{x} < q < \tilde{y}$$

Setzen wir $z = q + \sqrt{2}$ so gilt

$$\sqrt{2} + \tilde{x} < \sqrt{2} + q < \sqrt{2} + \tilde{y}$$

und damit $x < z < y$. Da $z \in M$ und M nur irrationale Zahlen enthält, ist ferner z irrational.

Aufgabe 21

a) Wir multiplizieren die rechte Seite der Gleichung aus und erhalten

$$(x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = (x-y)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k}y^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^{k+1}$$

Nun ersetzen wir den Summationsindex in der zweiten Summe durch $\tilde{k} = k + 1$ und erhalten

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k} y^k - \sum_{\tilde{k}=1}^{n} x^{n-1-(\tilde{k}-1)} y^{\tilde{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k} y^k - \sum_{k=1}^{n} x^{n-k} y^k \\
&= x^n - y^n.
\end{aligned}$$

Das beweist die Aussage. Diese Rechnung entspricht folgender sehr anschaulicher Umformungen

$$\begin{aligned}
(x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}) \\
&= x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} \\
&\quad\; - x^{n-1}y - \cdots - xy^{n-1} - y^n \\
&= x^n - y^n.
\end{aligned}$$

b) **(i)** Die übrigen Teilaufgabe kann man zum Beispiel mit Hilfe des kleinen Gauß lösen:

$$\begin{aligned}
3 + 7 + 11 + \cdots + (4n-1) &= \sum_{k=1}^{n} (4k-1) = 4\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \overset{\text{kleiner Gauß}}{=} 2n \cdot (n+1) - n \\
&= 2n^2 + n.
\end{aligned}$$

(ii) Man kann aber auch den Beweis des kleinen Gauß verwenden und rechnet zum Beispiel

$$1 + 5 + 9 + \cdots + (4n+1) = \sum_{k=0}^{n} (4k+1) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}(4k+1) + \sum_{k=0}^{n}(4k+1)\right)$$

Nun ändert man die Reihenfolge in der zweiten Summe und erhält

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}(4k+1) + \sum_{k=0}^{n}(4(n-k)+1)\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(4n+2)) = (n+1)(2n+1).$$

(iii) Den nächsten beiden Aufgaben sind einfache Beispiele von Teleskopsummen. Man rechnet $-1 + 2 - 3 + 4 - \cdots - (2n-1) + 2n = \sum_1^n (-(2k-1) + 2k) = \sum_1^n 1 = n$.

(iv) $1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (4n-3) - (4n-1) = \sum_{k=1}^{n}((4k-3) - (4k-1)) = \sum_{k=1}^{n}(-2) = -2n$.