

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen  
Elektrotechnik und Informationstechnik**

**4. Übungsblatt**

**Aufgabe 17 (Beweis von Satz 5)**

Es seien  $M, N \subset \mathbb{R}$  Mengen, die ein Maximum und ein Minimum besitzen. Begründen Sie folgende Aussagen:

- a)  $M \subset N \Rightarrow \max(M) \leq \max(N)$  und  $\min(N) \leq \min(M)$ .
- b)  $\max(M \cup N) = \max\{\max(M), \max(N)\}$  und  $\min(M \cup N) = \min\{\min(M), \min(N)\}$ .
- c)  $\min(M) = -\max(-M)$  mit  $-M := \{x \mid -x \in M\}$ .

**Aufgabe 18**

Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen Supremum, Infimum, Maximum bzw. Minimum besitzen. Bestimmen Sie gegebenenfalls diese Werte.

- a)  $\{x^2 - x + 2 \mid x \in \mathbb{R}\}$
- b)  $\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- c)  $\{x + \frac{1}{x} \mid 0 < x \leq 42\}$
- d)  $\{\frac{x^2}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R}\}$
- e)  $f([0, 1])$ , wobei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

**Aufgabe 19 (Existenz  $k$ -ter Wurzeln)**

Überzeugen Sie sich davon, dass es zu jeder reellen Zahl  $y \geq 0$  und jedem  $k \in \mathbb{N}$  genau eine reelle Zahl  $x \geq 0$  gibt mit

$$x^k = y.$$

**Aufgabe 20**

Zeigen Sie, dass die irrationalen Zahlen, also  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , dicht in  $\mathbb{R}$  liegen, d.h. dass es zu je zwei reellen Zahl  $x < y$  immer eine irrationale Zahl  $z$  gibt, so dass  $x < z < y$ .

**Aufgabe 21**

Sei  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Begründen Sie, dass für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

- b) Schreiben Sie folgende Ausdrücke mit dem Summenzeichen:

- (i)  $3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1)$ .
- (ii)  $1 + 5 + 9 + \dots + (4n + 1)$ .
- (iii)  $-1 + 2 - 3 + 4 - \dots - (2n - 1) + 2n$ .
- (iv)  $1 - 3 + 5 - 7 + \dots + (4n - 3) - (4n - 1)$ .

Finden und beweisen Sie eine Formel für diese Ausdrücke.