Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt

WS 2012/13
19.11.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

6. Übungsblatt

Aufgabe 26

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

a) $A = \{ z \in \mathbb{C} : |z + 1 + i| = |z - 3 - 3i| \}$;

b) $B = \{ z \in \mathbb{C} : |z - i| \geqslant 1 \text{ und } |z - 1 - 2i| < 3 \}$;

c) $C = \{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) \leqslant 1 \}$.

Aufgabe 27

Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, die Lösungen der Gleichung sind:

a) $z^2 - 2z + 3 = 0$;

b) $z^2 = |z|^2$.

Aufgabe 28

Es seien $w, z \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie: $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\,|z|^2 + 2\,|w|^2$.
Was bedeutet dies geometrisch?

Aufgabe 29

a) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil von

$$\sum_{k=1}^{22} (1 - i)^k \,.$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil von

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{i}{2}\right)^k .$$

Aufgabe 30

a) Zeigen Sie anhand der Definition, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\frac{2n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Zahl a konvergiert, und geben Sie zu $\varepsilon := 10^{-10}$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so an, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0$ stets $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt.

b) Entscheiden Sie jeweils, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so gibt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0$ gilt:

i) $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$; **ii)** $|a_n| < 2\varepsilon^2$; **iii)** $|a_n + a_{n+1}| < \varepsilon$.