Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt

WS 2012/13

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 31

a) Diese Folge ist konvergent, denn es gilt

$$\frac{n^2+3n-4}{1+n^2+4n^3} = \frac{1/n+3/n^2-4/n^3}{1/n^3+1/n+4} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0+0-0}{0+0+4} = 0.$$

b) Wegen $a_{2k} = 1+\frac{1}{2k} \to 1$ $(k\to\infty)$ und $a_{2k+1} = -1+\frac{1}{2k+1} \to -1$ $(k\to\infty)$ besitzt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zwei verschiedenen Häufungspunkte 1 und -1. Daher ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

c) Mit der bekannten Formel $\sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$, $m\in\mathbb{N}$, ergibt sich für jedes $n\in\mathbb{N}$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n^4} = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{n^2(n^2+1)}{2n^4} = \frac{1\cdot(1+n^{-2})}{2}.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} n^{-2} = 0$ folgt mit den Grenzwertsätzen $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1\cdot(1+0)}{2} = \frac{1}{2}$.

d) Für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{(2\sqrt{n}+3)^2}{(3\sqrt[3]{n}+2)^3} = \frac{(\sqrt{n}\,(2+3/\sqrt{n}))^2}{(\sqrt[3]{n}\,(3+2/\sqrt[3]{n}))^3} = \frac{n\cdot(2+3/\sqrt{n})^2}{n\cdot(3+2/\sqrt[3]{n})^3} = \frac{(2+3/\sqrt{n})^2}{(3+2/\sqrt[3]{n})^3}.$$

Wegen $2+3/\sqrt{n} \to 2$ und $3+2/\sqrt[3]{n} \to 3 \neq 0$ für $n\to\infty$ konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach den Grenzwertsätzen gegen $\frac{2^2}{3^3} = \frac{4}{27}$.

e) Mit Hilfe der binomischen Formel $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$, $a,b\in\mathbb{R}$, erhält man für jedes $n\in\mathbb{N}$

$$a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Wegen $\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ für $n\to\infty$ folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

f) Der binomische Lehrsatz liefert für jedes $n\in\mathbb{N}$

$$(1+n)^{42} = \sum_{k=0}^{42}\binom{42}{k} n^k = \alpha_0+\alpha_1 n+\ldots+\alpha_{42}n^{42}, \quad \text{wobei} \quad \alpha_k := \binom{42}{k}.$$

Wegen $\alpha_{42} = \binom{42}{42} = 1$ ergibt sich $(1+n)^{42}-n^{42} = \alpha_0+\alpha_1 n+\ldots+\alpha_{41}n^{41}$. Folglich ist

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha_0+\alpha_1 n+\ldots+\alpha_{40}n^{40}+\alpha_{41}n^{41}}{n^{41}} \\ &= \frac{\alpha_0}{n^{41}}+\frac{\alpha_1}{n^{40}}+\ldots+\frac{\alpha_{40}}{n}+\alpha_{41} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha_{41} = \binom{42}{41} = \binom{42}{1} = 42. \end{aligned}$$

Aufgabe 32

Definiere $a_n := (1+\frac{1}{n})^n$. Zu zeigen ist $a_n \leqslant a_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dies ist äquivalent zu

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leqslant \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\iff \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n \leqslant \frac{n+2}{n+1} \iff \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \geqslant \frac{n+1}{n+2}.$$

Die letzte Ungleichung gilt: Die Bernoullische Ungleichung liefert nämlich

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geqslant 1-\frac{n}{(n+1)^2},$$

und wegen $(n+1)^2 = n^2+2n+1 \geqslant n^2+2n = n(n+2)$ folgt

$$\geqslant 1-\frac{n}{n(n+2)} = 1-\frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Sei $b_n := (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. Zu zeigen ist $b_n \geqslant b_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir formen die Aussage $b_n \geqslant b_{n+1}$ äquivalent um:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \geqslant \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}$$

$$\iff \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geqslant \frac{n+2}{n+1} \iff \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geqslant \frac{n+2}{n+1}.$$

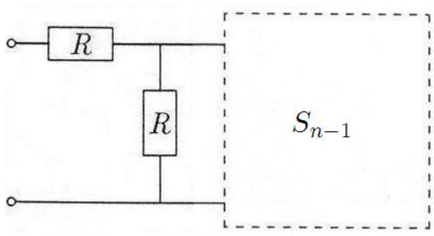
Um die letzte Ungleichung zu zeigen, verwenden wir wieder die Bernoullische Ungleichung und $(n+1)^2 \geqslant n(n+2)$:

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geqslant 1+\frac{n+1}{n(n+2)} \geqslant 1+\frac{n+1}{(n+1)^2} = 1+\frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Aufgabe 33

a) Da in der Schaltung S_1 zwei Widerstände R in Reihe geschaltet sind, ist $W_1 = 2R$.

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ sieht die Schaltung S_n folgendermaßen aus:



Widerstand W_{n-1}

Widerstand $\widetilde{R}$

Da die Widerstände R und W_{n-1} parallel geschaltet sind, gilt

$$\frac{1}{\widetilde{R}} = \frac{1}{R}+\frac{1}{W_{n-1}} \iff \widetilde{R} = \frac{RW_{n-1}}{R+W_{n-1}}.$$

R und $\widetilde{R}$ sind in Reihe geschaltet, daher ergibt sich für den Gesamtwiderstand von S_n

$$W_n = R + \widetilde{R} = R + \frac{RW_{n-1}}{R + W_{n-1}}\,.$$

Zusammen haben wir

$$W_1 = 2R, \qquad W_n = R + \frac{RW_{n-1}}{R + W_{n-1}} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := W_n/R$ ist gegeben durch

$$a_1 = 2, \qquad a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1}} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \leqslant a_n \leqslant 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

IA: Wegen $a_1 = 2$ ist $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \leqslant a_n \leqslant 2$ für $n = 1$ erfüllt. Dabei beachte man, dass aus $\sqrt{5} \leqslant 3$ die Gültigkeit der Ungleichung $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \leqslant \frac{1}{2}(1+3) = 2$ folgt.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für dieses n gelte $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \leqslant a_n \leqslant 2$ (IV). Dann folgt einerseits

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 + \frac{a_n}{1+a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{a_n} + 1} \overset{\text{IV}}{\geqslant} 1 + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})} + 1} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \\ &= 1 + \frac{-2+2\sqrt{5}}{9-5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{1}{2}\big(1+\sqrt{5}\big) \end{aligned}$$

und andererseits

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{1+a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{a_n} + 1} \overset{\text{IV}}{\leqslant} 1 + \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \leqslant 2.$$

Außerdem ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 1 + \frac{a_n}{1+a_n} - a_n = \frac{1 + a_n + a_n - a_n(1+a_n)}{1+a_n} = \frac{-a_n^2 + a_n + 1}{1+a_n} \\ &= -\frac{\big(a_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)\big(a_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)}{1+a_n} \leqslant 0, \qquad \text{da } a_n \geqslant \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist als beschränkte und monoton fallende Folge konvergent. Aus

$$a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{1+a_n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

folgt für den Grenzwert $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nach den Grenzwertsätzen (Man beachte $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$.)

$$a = 1 + \frac{a}{1+a} \quad \Longleftrightarrow \quad -a^2 + a + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \;\text{ oder }\; a = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Wegen $a_n \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ muss auch auch $a \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ gelten. Deshalb ist $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Aufgabe 34

a) Die Rekurstionsvorschrift für a_n steht bereits in der Angabe, nämlich $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$. Aus $a_{n+1} \cdot b_{n+1} = A$ erhalten wir außerdem

$$b_{n+1} = \frac{A}{a_{n+1}} \overset{a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}}{=} \frac{2A}{b_n + an} \overset{A=a_n\cdot b_n}{=} \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}.$$

Also ist b_{n+1} das harmonische Mittel der Zahlen a_n und b_n (vgl. Aufgabe 15 b)).

b) Aus den Ungleichungen über das harmonische und arithmetische Mittel wissen wir, dass

$$\min\{a_n, b_n\} \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant \max\{a_n, b_n\} \text{ für } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Für $n \geqslant 1$ wissen wir daher $\min\{a_n, b_n\} = b_n$ und $\max\{a_n, b_n\} = a_n$. Damit gile

$$b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$$

also ist insbesondere die Folge (b_n) ab dem zweiten Glied monoton wachsend und die Folge (a_n) monoton fallend.

c) Aus

$$b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$$

schließen wir außerdem, dass

$$0 < \min\{1, A\} = \min\{a_0, b_0\} \leqslant b_n \leqslant a_n \leqslant \max\{a_0, b_0\} = \max\{1, A\}.$$

Damit sind die Folgen auch beschränkt und aufgrund der Monotonie konvergent. Außerdem schließen wir aus

$$\min\{1, A\} \leqslant a_n, b_n,$$

dass $a = \lim_{n\to\infty} a_n \geqslant \min\{1, A\} > 0$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n \geqslant \min\{1, A\} > 0$.

Um die Grenzwerte zu bestimmen, setzen wir sie in die Rekursionsvorschrift ein. Wir erhalten

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{a+b}{2}$$

und damit $a = b$ und zum anderen, da $a, b \geqslant \min\{1, A\} > 0$

$$b = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2A}{a_n + b_n} = \frac{2A}{a+b} = \frac{A}{b}$$

also

$$a^2 = b^2 = A.$$

d) Wir erhalten mit Hilfe der Rekursionsvorschrift

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = \frac{(a_n + b_n)^2 - 4a_n b_n}{2(a_n + b_n)} \\ &= \frac{a_n^2 - 2a_n b_n + b_n^2}{2(a_n + b_n)} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} \\ &= \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} \frac{1}{2}(a_n - b_n) \end{aligned}$$

Da $a_n b_n \geqslant 0$ und deshalb $|a_n + b_n| \geqslant |a_n - b_n|$, folgt daraus

$$|a_{n+1} - b_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|a_n - b_n|.$$

Mit Hilfe einer Induktion erhalten wir daraus

$$|a_{n+1} - b_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}|A - 1|.$$

$\boxed{n = 0:}$

Für $n = 0$ folgt aus der letzten Ungleichung, dass $|a_1 - b_1| \leqslant \frac{1}{2}|a_0 - b_0| = |A - 1|$.

$\boxed{n \Rightarrow n + 1:}$

Wir erhalten

$$|a_{n+2} - b_{n+2}| \leqslant \frac{1}{2}|a_{n+1} - b_{n+1}| \overset{\text{IV}}{\leqslant} \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}|A - 1| = \frac{1}{2^{n+1}}|A - 1|.$$

Aufgabe 35

Um die k- te Wurzel aus $A > 0$ zu berechnen, startet man mit einen k-dimensionalen Rechteck mit den Seitenlägen A und $(k-1)$-mal 1. Dann hat dieses Rechteck das Volumen A. Anschließend betrachten wir das k-dimensionale Rechteck, das $(k-1)$ Kanten der Länge $a_{n+1} = \frac{(k-1)a_n+b_n}{k}$ - also einem gewichteten Mittel anstelle des arithmetischen Mittels - hat und eine Kante der Länge b_{n+1}, die so gewählt ist, dass das Rechteck wieder das Volumen A hat also $a_{n+1}^{k-1} b_{n+1} = A$. Wir erhalten also

$$b_{n+1} = \frac{A}{a_{n+1}^{k-1}} = \frac{a_n^{k-1} b_n}{\left(\frac{(k-1)a_n+b_n]}{k}\right)^{k-1}}.$$

(Wir werden leider erst in einer späteren Übung sehen, dass dieses Verfahren konvergiert. Leider reichen unsere Methoden dafür noch nicht aus. Wir bräuchten dafür die Ungleichung

$$a^{(k-1)/k} \cdot b^{1/k} \leqslant \frac{(k-1)a+b}{k}.$$

Anschließend kann man genau so argumentieren wie in der letzten Aufgabe.)
Nehmen wir nun an, dass sowohl die Folge a_n als auch b_n konvergiert. Dann gilt

$$a = \lim_{n\to} a_{n+1} = \frac{(k-1)a+b}{k},$$

also $a = b$ und

$$b = \frac{A}{a^{k-1}}$$

und damit $b^k = A$.