Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt

WS 2012/13
26.11.2012

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

7. Übungsblatt

Aufgabe 31

Untersuchen Sie jeweils $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

a) $a_n = \dfrac{n^2+3n-4}{1+n^2+4n^3}$;

b) $a_n = (-1)^n + 1/n$;

c) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n^4}$;

d) $a_n = \dfrac{(2\sqrt{n}+3)^2}{(3\sqrt[3]{n}+2)^3}$;

e) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

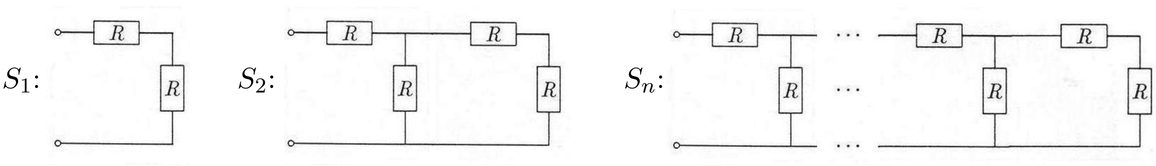
f) $a_n = \dfrac{(1+n)^{42} - n^{42}}{n^{41}}$.

Aufgabe 32

Definiere für jedes $n \in \mathbb{N}$: $a_n := (1+\frac{1}{n})^n$ und $b_n := (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.
Hinweis: Versuchen Sie, mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung zu argumentieren.

Aufgabe 33

R sei ein fester Ohmscher Widerstand. Durch Aneinanderhängen von $n \in \mathbb{N}$ Bauelementen entsteht die folgende Schaltung S_n:



a) Leiten Sie die folgende Rekursionsvorschrift für den Gesamtwiderstand W_n von S_n her:

$$W_1 = 2R, \qquad W_n = R + \frac{RW_{n-1}}{R+W_{n-1}} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setze $a_n := W_n/R$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \leqslant a_n \leqslant 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton ist.

c) Begründen Sie, dass der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert, und berechnen Sie diesen.

Aufgabe 34 (Babylonisches Wurzelziehen (ca 1700 v. Chr.))

Um die Kantenlänge eines Quadrates mit Flächeninhalt $A > 0$ zu berechnen, verwendeten die Babylonier folgende Idee: Sie begannen mit dem einfachsten Rechteck, das den gewünschten Flächeninhalt besitzt, das Rechteck mit Kantenlänge $a_0 = 1$ und $b_0 = A$. Dann konstruierten sie rekursiv neue Rechtecke, wobei Sie eine Kante gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Kanten setzten, also $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, und die zweite Kante so wählten, dass $a_{n+1}b_{n+1} = A$.

a) Geben Sie eine Rekursionsvorschrift für a_n und b_n an. Welche Bedeutung hat b_{n+1} ?

b) Zeigen Sie, dass $b_n \leqslant a_n$ für $n \geqslant 1$ und dass, wenn man jeweils das erste Glied vernachlässigt, die Folge (a_n) monoton fallend ist und (b_n) monoton wachsend ist. Schließen Sie daraus, dass beides konvergente Folgen sind.

c) Überzeugen Sie sich davon, dass $a = \lim_{n\to\infty} a_n \geqslant 0$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n \geqslant 0$ und dass

$$a^2 = b^2 = A$$

indem Sie die Rekursionsvorschrift aus Teil (a) einsetzen.

d) Begründen Sie, warum außerdem $|a_{n+1} - b_{n+1}| = \left|\frac{(a_n-b_n)^2}{2(a_n+b_n)}\right| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}|A-1|$.

Aufgabe 35 (Eine Anregung für Interessierte)

Fällt Ihnen ein Algorithmus ein, um auf ähnliche Weise die k-te Wurzel aus $A > 0$ zu berechnen? Nehmen Sie an, dass das Verfahren konvergiert und beweisen Sie, dass es gegen die k-te Wurzel von A konvergiert.