Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt WS 2012/13

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge für das 9. Übungsblatt

Aufgabe 40

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ definiere $a_n := n^3 e^{-n}$. Wir wenden das Wurzelkriterium an: Wegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = (\sqrt[n]{n}\,)^3 e^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1}$$

gilt $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = e^{-1} < 1$, d. h. das Wurzelkriterium liefert die Konvergenz der Reihe.

b) Wegen $\sqrt[n]{|(\sqrt[n]{n}-1)^n|} = \sqrt[n]{n} - 1 \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^\infty (\sqrt[n]{n}-1)^n$ nach dem Wurzelkriterium absolut konvergent und somit auch konvergent.

c) Setze $a_n := \frac{n}{3^n}(1+(-1)^n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $|a_n| \leqslant \frac{2n}{3^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$|a_n| \leqslant \frac{\sqrt[n]{2n}}{3} = \frac{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}}{3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3} < 1\,.$$

Die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$ folgt also mit Hilfe des Wurzelkriteriums.

d) Ist $a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ gesetzt, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right| = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{(1+1/n)^2}{(2+2/n)(2+1/n)}.$$

Also ist $\limsup_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{(1+0)^2}{(2+0)(2+0)} = \frac{1}{4} < 1$. Das Quotientenkriterium liefert, dass $\sum_{n=0}^\infty a_n$ absolut konvergiert, also insbesondere konvergiert.

e) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $a_n := \frac{(2n)!\,(3n)!}{n!\,(4n)!}$. Dann gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n+2)!\,(3n+3)!}{(n+1)!\,(4n+4)!}\cdot\frac{n!\,(4n)!}{(2n)!\,(3n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}$$
$$= \frac{(2+\frac{2}{n})(2+\frac{1}{n})(3+\frac{3}{n})(3+\frac{2}{n})(3+\frac{1}{n})}{(1+\frac{1}{n})(4+\frac{4}{n})(4+\frac{3}{n})(4+\frac{2}{n})(4+\frac{1}{n})} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3}{1\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4} = \frac{27}{64} < 1\,,$$

Nach dem Quotientenkriterium ist $\sum_{n=0}^\infty a_n$ absolut konvergent und damit auch konvergent.

f) Wegen $i^4 = (-1)^2 = 1$ gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$i^{4m-3} = i, \qquad i^{4m-2} = -1, \qquad i^{4m-1} = -i, \qquad i^{4m} = 1.$$

Folglich erhalten wir für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{4N}\frac{i^n}{n} = \sum_{m=1}^{N}\left(\frac{i^{4m-3}}{4m-3} + \frac{i^{4m-2}}{4m-2} + \frac{i^{4m-1}}{4m-1} + \frac{i^{4m}}{4m}\right)$$
$$= i\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{4m-3} - \frac{1}{4m-1}\right) + \sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{4m} - \frac{1}{4m-2}\right)$$
$$= i\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots + \frac{1}{4N-3} - \frac{1}{4N-1}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{6} + - \ldots + \frac{1}{4N} - \frac{1}{4N-2}\right)$$
$$= i\sum_{k=1}^{2N}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{2N}(-1)^k\frac{1}{2k}.$$

— bitte wenden —

Da $(\frac{1}{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\frac{1}{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallende Nullfolgen sind, konvergieren diese Summen für $N \to \infty$ nach dem Leibnizkriterium. Damit wissen wir: Wenn wir mit s_N die N-te Partialsumme der zu untersuchenden Reihe bezeichnen, dann konvergiert s_{4N} für $N \to \infty$.

Für $m \in \{1, 2, 3\}$ gilt wegen $|i^n/n| = 1/n$

$$s_{4N+m} = s_{4N} + \sum_{n=4N+1}^{4N+m} \frac{i^n}{n} \xrightarrow{N\to\infty} \lim_{N\to\infty} s_{4N}.$$

Folglich konvergiert s_N für $N \to \infty$, d.h. die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ konvergiert. Sie ist aber nicht absolut konvergent, weil die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{i^n}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

Aufgabe 41

Es sei $\theta < 1$ und es gelte $a_{n+1} \leqslant \theta a_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Da

$$\frac{(n+1)^l}{n^l} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^l \to 1 < \frac{1}{\sqrt{\theta}}$$

gilt

$$\frac{(n+1)^l}{n^l} < \frac{1}{\sqrt{\theta}}$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Also

$$(n+1)^l a_{n+1} < \frac{\theta}{\sqrt{\theta}} n^l a_n = \sqrt{\theta} n^l a_n$$

für fast alle n. Da $\sqrt{\theta} < 1$, erfüllt damit die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^l a_n$ das Quotientenkriterium und ist konvergent.
Im Falle das Wurzelkriteriums, also falls es ein $\theta < 1$ gibt mit $\sqrt[n]{a_n} \leqslant \theta$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ nutzen wir wieder dass

$$\sqrt[n]{n^l} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^l \to 1 \text{ für } n \to \infty$$

um zu sehen, dass

$$\sqrt[n]{n^l} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^l \leqslant \frac{1}{\sqrt{\theta}}$$

für fast alle n. Damit erhalten wir

$$\sqrt[n]{n^l a_n} < \frac{\theta}{\sqrt{\theta}} = \sqrt{\theta} \overset{\theta<1}{<} 1$$

für fast alle n. Damit erfüllt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^l a_n$ das Wurzelkriterium und ist konvergent. Daher gilt die Aussage auch, wenn wir das Quotientenkriterium durch das Wurzelkriterium ersetzen.

Aufgabe 42

a) Die Aussage ist falsch. Sei etwa $a_n := \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a_n \neq 0$ und $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{n}{n+1} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Allerdings ist die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

b) Die Aussage ist falsch. Seien etwa $a_n := \frac{1}{n}$ und $b_n := \frac{1}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a_n - b_n \to 0$ $(n \to \infty)$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert. Allerdings ist die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

c) Die Aussage ist falsch. Betrachte etwa $a_n := \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, jedoch divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

— bitte wenden —

Aufgabe 43

a) Wir berechnen das Cauchyprodukt $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ wobei

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}a_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}(-1)^k \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}.$$

Da $(n-k+1)(k+1) \leqslant (n+1)^2$ für $0 \leqslant k \leqslant n+1$, gilt

$$|c_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = 1$$

Die Folge c_n ist also keine Nullfolge und damit ist das Chauchyprodukt $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergent.

b) Der Satz über die Konvergenz des Cauchyproduktes aus der Vorlesung ist nicht anwendbar, da dafür zumindest eine der verwendeten Reihen absolut konvergieren muss. Wir wissen aus Vergleich mit der harmonischen Reihe, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \overset{\sqrt{k+1} \leqslant k+1}{\geqslant} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty.$$

Also ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, aber nicht absolut konvergent

Aufgabe 44

a) Es gilt

$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i\sin(x+y).$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned} e^{ix}e^{iy} &= (\cos(x) + i\sin(x))(\cos(x) + i\sin(y)) \\ &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + i(\cos(x)\sin(y) + \cos(y)\sin(x)) \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\cos(x+y) + i\sin(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + i(\cos(x)\sin(y) + \cos(y)\sin(x)).$$

Der Realteil dieser Gleichung liefert uns

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

Der Imaginärteil lautet

$$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \cos(y)\sin(x).$$

b) Im Fall $A = B = 0$ ist nichts zu tun. Also betrachten wir im Folgenden nur den Fall, dass nicht sowohl A als auch B gleich 0 sind. Wir rechnen

$$Ae^{ix} + Be^{i(x-\pi/2)} = e^{ix}(A + Be^{-i\pi/2}) =$$

und

$$A + Be^{-i\pi/2} = A + B(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)) = A - iB.$$

Wir suchen nun $r > 0$ und $\varphi \in R$ so, dass

$$re^{i\varphi} = A - iB$$

und damit

$$Ae^{ix} + Be^{i(x-\pi/2)} = re^{i(x+\varphi)} \tag{1}$$

Wir wissen

$$r = |A - iB| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

und wir müssen φ so wählen, dass

$$\frac{A - iB}{r} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

Ist $A = 0$, so wählen wir $\varphi = \pi/2$ wenn $B < 0$ und $\varphi = -\pi/2$, falls $B > 0$. Ist dagegen $A \neq 0$ so erhalten wir

$$\tan(\varphi) := \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = -\frac{B}{A}.$$

Tangens hat eine Umkehrfunktion auf dem offenen Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, die Funktion arctan. Falls nun $A - Bi$ im ersten oder vierten Quadranten liegt, also falls $A > 0$, so erhalten wir mit ihrer Hilfe

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{B}{A}\right).$$

Falls $A < 0$, so erhält man

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{B}{A}\right) + \pi.$$

c) Der Imaginärteil der Gleichung (1) lautet

$$A\sin(x) + B\sin(x - \pi/2) = \tilde{A}\sin(x + \varphi)$$

der Realteil ist

$$A\cos(x) + B\cos(x - \pi/2) = \tilde{A}\cos(x + \varphi)$$

Nutzt man $\cos(x - \pi/2) = \sin(x)$ und $\sin(x - \pi/2) = -\cos(x)$, so erhält man

$$A\sin(x) - B\cos(x) = \tilde{A}\sin(x + \varphi)$$

der Realteil ist

$$A\cos(x) + B\sin(x) = \tilde{A}\cos(x + \varphi).$$

Die Bedeutung dieser Gleichung ist Folgende: Jede Linearkombination zweier Sinus- und Cosinusschwingungen ist selbst eine möglicherweise um eine Phase φ verschobene Cosinusschwingung oder Sinusschwingung mit neuer Amplitude.