Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt

WS 2012/13

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge für das 10. Übungsblatt

Aufgabe 45

a) Es gilt

$$\frac{2i-10}{3i-2} = \frac{(-10+2i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} = \frac{(20+6)+(30-4)i}{4+9} = 2+2i.$$

Um die Polardarstellung zu berechnen, beachten wir erst, dass

$$|2+2i| = \sqrt{8}.$$

Da $2+2i$ auf der Winkelhalbierenden liegt, erhalten wir

$$\frac{2i-10}{3i-2} = \sqrt{8}e^{i\frac{1}{4}\pi}.$$

Die Polardarstellung aller komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die

$$z^3 = \frac{2i-10}{3i-2}$$

erfüllen sind damit

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{1}{12}\pi},$$

$$z_2 = \sqrt{2}e^{i(\frac{1}{12}+\frac{2}{3})\pi} = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

und

$$z_3 = \sqrt{2}e^{i(\frac{1}{12}+\frac{4}{3})\pi} = \sqrt{2}e^{i\frac{17}{12}\pi}.$$

b) Die Funktion f ist genau dann stetig, wenn die linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwerte in den Punkten 0 und 1 mit dem entsprechenden Funktionswert übereinstimmen. Daraus erhalten wir aus der Bedingung an der Stelle 1

$$1 = a+b$$

und aus der Bedingung an der Stelle 0

$$0 = a.$$

Damit ist f genau dann stetig, wenn $a = 0$ and $b = 1$.

Aufgabe 46

a) Die Funktion $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist als Komposition stetiger Funktionen überall dort stetig, wo sie definiert ist, d.h. außerhalb der Nullstellenmenge des Nenners. Wegen $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$ verschwindet der Nenner für $x = 1$ oder $x = 3$. Daher ist $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ auf $\mathbb{R}\backslash\{1,3\}$ stetig, so dass auch f auf $\mathbb{R}\backslash\{1,3\}$ stetig ist. Nun gilt $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = f(1)$, also ist f auch in der Stelle 1 stetig. Da 3 eine Nullstelle des Nenners und keine Nullstelle des Zählers von $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist, existiert $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ nicht. Also ist f in 3 unstetig (unabhängig davon, was der Funktionswert $f(3)$ tatsächlich ist).

— bitte wenden —

b) Wegen $x^2 + 2x - 15 = (x-3)(x+5)$ ist dieser Ausdruck für $x \in [-7,-5]$ nichtnegativ, x^3 hingegen negativ, also gilt $f(x) = x^3$ für $x \in [-7,-5]$. Für $x \in [0,3]$ ist $(x-3)(x+5) \leqslant 0$ und $x^3 \geqslant 0$, also gilt $f(x) = x^2 + 2x - 15$ für $x \in [0,3]$. Für $x \in [-1,0)$ ist $x^3 \in [-1,0)$, aber $x^2 + 2x - 15 \leqslant 1 + 0 - 15 = -14$, also gilt $f(x) = x^2 + 2x - 15$ für $x \in [-1,0)$. Das Minimum zweier stetiger Funktionen g und h ist als Komposition stetiger Funktionen stetig: $\min\{g,h\} = \frac{g+h-|g-h|}{2}$ (vgl. Aufgabe 5 vom 2. Übungsblatt). Daher ist f jedenfalls außerhalb $\{-5,-1\}$ stetig. Da $x^2 + 2x - 15$ und $x+5$ in -1 nicht denselben Wert annehmen sowie x^3 und $x+5$ an der Stelle -5 verschieden sind, ist f an jenen Stellen auch nicht stetig.

Aufgabe 47

a) Als Komposition stetiger Funktionen ist f auf $[-1,1] \setminus \{0\}$ stetig. Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,. \tag{1}$$

Demnach gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, und damit ist f auch stetig in 0.

b) Wir zeigen zunächst $|f(x)| \leqslant 1$ für alle $x \in [-1,1]$: Für jedes $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt

$$|f(x)| \overset{(1)}{=} \frac{|x|}{1+\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\geqslant 0}} \leqslant |x| \leqslant 1.$$

Wegen $f(0) = 0$ ist $|f(x)| \leqslant 1$ für alle $x \in [-1,1]$ bewiesen. Hieraus folgt $f([-1,1]) \subset [-1,1]$. Nun zeigen wir $[-1,1] \subset f([-1,1])$. Sei dazu $y_0 \in [-1,1]$. Wegen $-1 = f(-1)$ und $1 = f(1)$ ist $y_0 \in [f(-1), f(1)]$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in [-1,1]$ mit $y_0 = f(x_0) \in \{f(x) \mid x \in [-1,1]\} = f([-1,1])$. Da $y_0 \in [-1,1]$ beliebig war, folgt $[-1,1] \subset f([-1,1])$.

Insgesamt ergibt sich $f([-1,1]) = [-1,1]$.

c) Um die Existenz der Umkehrfunktion von f nachzuweisen, verwenden wir folgendes Resultat: Seien X, Y Mengen und $f: X \to Y$ eine Funktion. Gelingt es, die Gleichung $y = f(x)$ durch Äquivalenzumformungen (!) in die Form $x = g(y)$ zu bringen (wobei $x \in X$, $y \in Y$ und $g: Y \to X$), dann ist f bijektiv und die Umkehrfunktion von f lautet g.

Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned}
y = f(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad y = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - xy = \sqrt{1-x^2} \\
&\overset{1-xy\geqslant 0}{\Longleftrightarrow} \quad 1 - 2xy + x^2y^2 = 1 - x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2(1+y^2) = 2xy \\
&\overset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad x(1+y^2) = 2y \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{2y}{1+y^2}\,.
\end{aligned}$$

Für $x = 0$ gilt $y = f(0) = 0$, also gilt auch hier $x = \frac{2y}{1+y^2}$. Die Rechnung zeigt: f besitzt eine Umkehrfunktion, die durch

$$f^{-1} : \underbrace{[-1,1]}_{=f([-1,1])} \to [-1,1],\ y \mapsto \frac{2y}{1+y^2}$$

gegeben ist.

d) Seien $x_1, x_2 \in [-1,1]$ mit $x_1 < x_2$. Zu zeigen ist $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
f^{-1}(x_2) - f^{-1}(x_1) &= \frac{2x_2}{1+x_2^2} - \frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2x_2(1+x_1^2) - 2x_1(1+x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} = \frac{2(x_2 - x_1 + x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} \\
&= \frac{2(x_2 - x_1 + x_1x_2(x_1 - x_2))}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} = \frac{2(x_2 - x_1)(1 - x_1x_2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} > 0\,,
\end{aligned}$$

denn wegen $-1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$ ist $x_1x_2 < 1$.

e) Da f^{-1} die Umkehrfunktion von f ist, ist f die Umkehrfunktion von f^{-1}. Da f^{-1} streng monoton wachsend ist, ist es ihre Umkehrfunktion f nach Satz 6 in 10.4 auch.

Aufgabe 48

Wir betrachten die Funktion

$$g : [0, 1/2] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - f(x + 1/2).$$

Diese hat genau dann in $x_0 \in [0, 1/2]$ eine Nullstelle, wenn $f(x_0) = f(x_0 - 1/2)$. Außerdem gilt

$$g(1/2) = f(1/2) - f(1) = f(1/2) - f(0) = -g(0). \tag{2}$$

Nun machen wir eine Fallunterscheidung. Falls $g(0) \neq 0$, so haben $g(0)$ und $g(1/2)$ unterschiedliche Vorzeichen. Aufgrund des Zwischenwertsatzes gibt es also ein $x_0 \in [0, 1/2]$ mit $g(x_0) = 0$ also

$$f(x_0) = f(x_0 + 1/2).$$

Falls $g(0) = 0$, so gilt aufgrund der Definition von g

$$0 = g(0) = f(0) - f(1/2)$$

also

$$f(x_0) = f(x_0 + 1/2)$$

für $x_0 = 0$.