Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt

WS 2012/13

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge für das 11. Übungsblatt

Aufgabe 50

a) Wir berechnen zunächst

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\ldots)-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\ldots}{y}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{1+\frac{y}{2!}+\frac{y^2}{3!}+\frac{y^3}{4!}+\ldots}{1}=1$$

(Die letzte Gleichheit gilt aufgrund der Stetigkeit von Potenzreihen). Für jedes $a\in\mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}=\lim_{x\to a}e^a\,\frac{e^{x-a}-1}{x-a}=\lim_{y\to 0}e^a\,\frac{e^y-1}{y}=e^a\cdot 1=e^a.$$

b) Zunächst zeigen wir $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Hierzu betrachten wir die Reihenentwicklung des Sinus

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\ldots}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+-\ldots\xrightarrow{x\to 0}1.$$

Aus $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ folgt insbesondere $\sin x\neq 0$ in der Nähe von $x_0=0$. Für jede Folge (x_n) mit $x_n\to 0$ und $x_n\neq 0$ hat man also $\sin x_n\to 0$ und $\sin x_n\neq 0$ für fast alle n. Daher folgt mit $\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$ (vgl. Teil a) mit $a=0$)

$$\frac{e^{\sin x_n}-1}{\sin x_n}\xrightarrow{n\to\infty}1\,,\qquad\text{also}\qquad\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\xrightarrow{x\to 0}1.$$

Nach den Grenzwertsätzen existiert der zu untersuchende Grenzwert und es gilt

$$1=1\cdot 1=\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}\,.$$

c) Mit der Reihenentwicklung von $\sin x$ hat man für jedes $x\neq 0$

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\frac{x-(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\ldots)}{x(x-\frac{1}{3!}x^3+\ldots)}=\frac{\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{5!}x^5+\ldots}{x^2-\frac{1}{3!}x^4+\ldots}=\frac{\frac{1}{3!}x-\frac{1}{5!}x^3+\ldots}{1-\frac{1}{3!}x^2+\ldots}\,,$$

und hieraus folgt wegen der Stetigkeit von Potenzreihen

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\,\frac{\frac{1}{3!}x-\frac{1}{5!}x^3+\ldots}{1-\frac{1}{3!}x^2+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}x^2+\ldots}{1-\frac{1}{3!}x^2+\ldots}=\frac{\frac{1}{3!}}{1}=\frac{1}{6}\,.$$

d) Für jedes $x > 0$ gilt

$$\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = \left(1 + \frac{2}{2x+1}\right)^{x+1} = \left(1 + \frac{1}{x+1/2}\right)^{x+1/2} \cdot \left(1 + \frac{1}{x+1/2}\right)^{1/2}.$$

Es gilt

$$\lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^y = \lim_{t\to+0}(1+t)^{1/t} = \lim_{t\to+0} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} = 1.$$

Demzufolge ist auch

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1/2}\right)^{x+1/2} = e\,,$$

und wegen $\lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{x+1/2} = 1$ ergibt sich

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1/2}\right)^{x+1/2} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1/2}\right)^{1/2} = e \cdot 1^{1/2} = e\,.$$

Alternativ: Aufgrund von $\frac{x}{e^x-1} \xrightarrow{x\to 0} 1$ ergibt sich

$$\lim_{y\to 1}\frac{\ln y}{y-1} = \lim_{y\to 1}\frac{\ln y}{e^{\ln y}-1} = 1\,, \quad \text{denn} \quad \ln y \xrightarrow{y\to 1} 0\,.$$

Wir setzen nun $f(x) := \frac{2x+3}{2x+1}$. Dann gilt $f(x) = \frac{2+3/x}{2+1/x} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{2+0}{2+0} = 1$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\ln(f(x))^{x+1}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left((x+1)\ln f(x)\right) = \lim_{x\to\infty}\left((x+1)(f(x)-1)\frac{\ln f(x)}{f(x)-1}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty}(x+1)(f(x)-1) \cdot \lim_{x\to\infty}\frac{\ln f(x)}{f(x)-1} = \lim_{x\to\infty}(x+1)(f(x)-1)\cdot 1 \\
&= \lim_{x\to\infty}(x+1)\frac{2}{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+2}{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+2/x}{2+1/x} = 1\,.
\end{aligned}$$

Für den zu untersuchenden Grenzwert ergibt sich also wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{x\to\infty}(f(x))^{x+1} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(f(x))^{x+1}} = e^{\lim_{x\to\infty}\ln(f(x))^{x+1}} = e^1 = e\,.$$

Aufgabe 51

a) Für $a_n := (2n+1)/(n-1)^2$ gilt

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2n+1}{(n-1)^2}\cdot\frac{n^2}{2n+3} = \frac{2+1/n}{(1-1/n)^2}\cdot\frac{1}{2+3/n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{2} = 1\,.$$

Die Potenzreihe hat daher den Konvergenzradius 1. Also liegt für $|x-5| < 1$, d.h. $4 < x < 6$, Konvergenz und für $|x-5| > 1$, d.h. $x < 4$ oder $6 < x$, Divergenz der Potenzreihe vor. Wir müssen nun noch die Ränder des Konvergenzintervalls, also $x = 4$ und $x = 6$, untersuchen. Dies liefert die zwei Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{(n-1)^2}(-1)^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{(n-1)^2}\,.$$

Die Konvergenz der ersten Reihe folgt aus dem Leibnizkriterium, weil $a_n = \frac{2+1/n}{(\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}})^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und (a_n) monoton fallend ist, denn

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geqslant \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2n+3}{n^2} = a_{n+1}\,.$$

Die zweite Reihe hingegen ist divergent. Dies folgt aus dem Minorantenkriterium wegen $a_n \geqslant 2n/n^2 = 2/n$ und der Divergenz der harmonischen Reihe.

Insgesamt: Die Potenzreihe $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{(n-1)^2}(x-5)^n$ konvergiert genau für $x \in [4,6)$.

b) Wegen $\sqrt[n]{|1/n^n|} = 1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ hat diese Potenzreihe den Konvergenzradius ∞, d.h. sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Die Potenzreihe hat die Form $\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$ mit $a_{2n} = e^{n(1+(-1)^n)}$ und $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \sqrt[2n]{\left|e^{n(1+(-1)^n)}\right|} = \begin{cases} e^{2n/2n} = e\,, & n \text{ gerade}\,, \\ e^{0/2n} = 1\,, & n \text{ ungerade}\,, \end{cases}$$

und wegen $\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = e$, d. h. die Potenzreihe hat den Konvergenzradius e^{-1}. Für $x = \pm e^{-1}$ ergibt sich die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} e^{-2n}$.

Diese Reihe ist divergent, da für gerades n gilt: $e^{n(1+(-1)^n)} e^{-2n} = e^{2n} e^{-2n} = 1 \not\to 0$ $(n \to \infty)$. Die Potenzreihe konvergiert daher nur für $x \in (-e^{-1}, e^{-1})$.

Bemerkung: Man kann auch $y := x^2$ setzen und $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} y^n$ untersuchen. Diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius e^{-2}, d.h. sie ist konvergent für $|y| < e^{-2}$ und divergent für $|y| > e^{-2}$. Hieraus folgt dann Konvergenz der ursprünglichen Potenzreihe für $|x| < e^{-1}$ und Divergenz für $|x| > e^{-1}$.

d) Für $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ gilt offenbar $1 \leqslant a_n \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ folgt hieraus $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ hat also den Konvergenzradius $R = 1^{-1} = 1$. Für $|z| = 1$ konvergiert die Reihe nicht, denn dann gilt $|a_n z^n| = a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, d. h. die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0. Daher konvergiert die Potenzreihe nur für $|z| < 1$.

e) Auch diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius 1, denn

$$\sqrt[k]{\left|2^k z^{k^2}\right|} = \sqrt[k]{2^k} \cdot \sqrt[k]{|z|^{k^2}} = 2\,|z|^k \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} 0, & |z| < 1, \\ \infty, & |z| > 1. \end{cases}$$

Auf dem Rand des Konvergenzkreises liegt keine Konvergenz vor, denn für $|z| = 1$ gilt $\left|2^k z^{k^2}\right| = 2^k \not\to 0$ $(k \to \infty)$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{k^2}$ konvergiert somit nur für $|z| < 1$.

f) Für den Konvergenzradius R von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z+3i)^n$ mit $a_n := \frac{1}{n^2}$ ergibt sich wegen

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

$R = 1^{-1} = 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ konvergiert also für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| < 1$ und divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| > 1$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| = 1$ gilt

$$\left|\frac{(z+3i)^n}{n^2}\right| = \frac{|z+3i|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \qquad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ für $|z+3i| = 1$ nach dem Majorantenkriterium konvergent. Also konvergiert die Reihe genau für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| \leqslant 1$.

Aufgabe 52

a) Die Potenzreihe lässt sich als Differenz zweier Potenzreihen darstellen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!}\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1-2}{(n+1)!}\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!}\, z^n\,.$$

Die erste Reihe ergibt $E(z)$, die zweite liefert für $z = 0$ den Wert 2 und für $z \neq 0$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!}\, z^n = \frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\, z^{n+1} = \frac{2}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{2}{z}\big(E(z) - 1\big)\,.$$

Insgesamt folgt: Die von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n$ dargestellte Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$f(0) = E(0) - 2 = -1\,, \qquad f(z) = E(z) - \frac{2E(z)-2}{z} = \frac{(z-2)E(z)+2}{z} \quad (z \neq 0)\,.$$

b) Hier ergibt sich gemäß der Reihendarstellung der Sinus-Funktion für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+2} = (z+1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+1} = (z+1)\sin(z+1)\,.$$

Aufgabe 53

a) Wir kennen die Potenzreihen für $\sin z$ und $\cos z$ um die Entwicklungsstelle 0. In Verbindung mit dem Additionstheorem für $\sin z$ ergibt sich für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(1+(z-1)) = \sin(1)\cos(z-1) + \cos(1)\sin(z-1) \\ &= \sin(1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(z-1)^{2k} + \cos(1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-1)^{2k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n \end{aligned}$$

mit

$$a_n := \begin{cases} \sin(1)\,\frac{(-1)^{n/2}}{n!}\,, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \cos(1)\,\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n!}\,, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist offensichtlich ∞.

b) Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ erhalten wir unter Verwendung des Hinweises

$$f(z) = \frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z} = \frac{2}{3}\frac{1}{1-(-z)} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-(2z)}\,.$$

Für $|z| < 1$ gilt

$$\frac{2}{3}\frac{1}{1-(-z)} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$$

und für $|2z| < 1$ ist

$$\frac{1}{3}\frac{1}{1-(2z)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n\,.$$

Hiermit folgt für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \min\{1, \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}$

$$f(z) = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit $a_n := \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n = \frac{1}{3}(2(-1)^n + 2^n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2$ (Rechnung?) beträgt der Konvergenzradius der Potenzreihe $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

c) Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ erhalten wir unter Verwendung der Identität $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$

$$f(z) = \frac{2/3}{3+(z-2)} + \frac{1/3}{-3-2(z-2)} = \frac{2/9}{1+(z-2)/3} + \frac{-1/9}{1+2(z-2)/3}\,.$$

Für $\frac{1}{3}\,|z-2| < 1$ gilt

$$\frac{1}{1+(z-2)/3} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{3}\right)^n$$

und für $\frac{2}{3}|z-2|<1$ ist

$$\frac{1}{1+2(z-2)/3} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2(z-2)}{3}\right)^n .$$

Hiermit folgt für jedes $z\in\mathbb{C}$ mit $|z-2|<\min\{3,\frac{3}{2}\}=\frac{3}{2}$

$$f(z) = \frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{3}\right)^n - \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2(z-2)}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-2)^n$$

mit $a_n := \frac{2}{9}(-\frac{1}{3})^n - \frac{1}{9}(-\frac{2}{3})^n = (-\frac{1}{3})^{n+2}(2-2^n)$, $n\in\mathbb{N}_0$. Wegen $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{2}{3}$ (Beweis?) beträgt der Konvergenzradius der Potenzreihe $\frac{3}{2}$.

Bemerkung: Die Darstellung $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z}+\frac{1/3}{1-2z}$ kann man auf die folgende Weise erhalten ($\to$ Partialbruchzerlegung): Wegen $1-z-2z^2=(1+z)(1-2z)$ machen wir den Ansatz

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{a}{1+z}+\frac{b}{1-2z}$$

und müssen die Konstanten $a,b\in\mathbb{R}$ berechnen. Die rechte Seite dieser Gleichung liefert

$$\frac{a}{1+z}+\frac{b}{1-2z} = \frac{a(1-2z)+b(1+z)}{(1+z)(1-2z)} = \frac{a+b+(-2a+b)z}{1-z-2z^2} .$$

Die Darstellung gelingt also, wenn $a+b=1$ und $-2a+b=-1$ sind. Dies bedeutet $a=\frac{2}{3}$ und $b=\frac{1}{3}$.

Aufgabe 54

Die Funktionen *Cosinus hyperbolicus* und *Sinus hyperbolicus* sind definiert durch

$$\cosh\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \tfrac{1}{2}(e^x+e^{-x}), \qquad \sinh\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \tfrac{1}{2}(e^x-e^{-x}) .$$

a) Für jedes $x\in\mathbb{R}$ sind die Potenzreihen

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k \qquad \text{und} \qquad e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}x^k$$

(absolut) konvergent, daher konvergieren nach Satz 3 in 8.2 auch deren Summe bzw. Differenz:

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}\,\frac{1}{2}\big(1+(-1)^k\big)x^k\right) \overset{n=2k}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}\,\frac{1}{2}\big(1-(-1)^k\big)x^k\right) \overset{n=2k+1}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

Insbesondere ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihen ∞.

b) Für alle $x,y\in\mathbb{R}$ gilt

i)

$$\cosh(-x) = \tfrac{1}{2}(e^{-x}+e^{-(-x)}) = \cosh x ; \quad \sinh(-x) = \tfrac{1}{2}(e^{-x}-e^{-(-x)}) = -\sinh x ;$$

(d.h. cosh ist eine gerade und sinh eine ungerade Funktion)

ii)

$$\begin{aligned}\cosh^2(x)-\sinh^2(x) &= \big(\tfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})\big)^2 - \big(\tfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})\big)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}\big((e^{2x}+2e^0+e^{-2x})-(e^{2x}-2e^0+e^{-2x})\big) = \tfrac{1}{4}\,4e^0 = 1 ;\end{aligned}$$

— bitte wenden —

iii)

$$\begin{aligned}
\cosh(x)\,\cosh(y)+\sinh(x)\,\sinh(y) &= \tfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})\,\tfrac{1}{2}(e^y+e^{-y})+\tfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})\,\tfrac{1}{2}(e^y-e^{-y})\\
&= \tfrac{1}{4}(e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-x+y}+e^{-x-y})+\tfrac{1}{4}(e^{x+y}-e^{x-y}-e^{-x+y}+e^{-x-y})\\
&= \tfrac{1}{2}(e^{x+y}+e^{-(x+y)})=\cosh(x+y)\,;\\
\sinh(x)\,\cosh(y)+\cosh(x)\,\sinh(y) &= \tfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})\,\tfrac{1}{2}(e^y+e^{-y})+\tfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})\,\tfrac{1}{2}(e^y-e^{-y})\\
&= \tfrac{1}{4}(e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-x-y})+\tfrac{1}{4}(e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-x+y}-e^{-x-y})\\
&= \tfrac{1}{2}(e^{x+y}-e^{-(x+y)})=\sinh(x+y)\,.
\end{aligned}$$

c) Beh.: Auf $[0,\infty)$ ist die Funktion cosh streng monoton wachsend. Für alle $0 \leqslant x < y$ gilt $e^x \geqslant 1$ und $e^y > 1$ und somit $\frac{1}{e^x e^y} < 1$. Außerdem ist $e^y - e^x > 0$. Daraus ergibt sich dann $\frac{e^y-e^x}{e^x e^y} < e^y - e^x$ bzw. $e^{-x} - e^{-y} < e^y - e^x$ bzw. $e^x + e^{-x} < e^y + e^{-y}$, d.h. $\cosh(x) < \cosh(y)$.

Beh.: Auf $(-\infty,0]$ ist die Funktion cosh streng monoton fallend. Dies folgt aus **b) i)** zusammen mit dem eben Gezeigten. Für alle $x < y \leqslant 0$ gilt nämlich

$$\cosh(x)-\cosh(y) \overset{\textbf{b)i)}}{=} \cosh(-x)-\cosh(-y) \overset{0\leqslant -y<-x}{>} 0\,.$$

Beh: Die Funktion sinh ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Dies ergibt sich aus der Monotonie von $\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto e^x$. Ist nämlich $x<y$, so haben wir $e^x < e^y$ und $e^{-y} < e^{-x}$ wegen $-y < -x$. Daraus folgt $e^x + e^{-y} < e^y + e^{-x}$ bzw. $e^x - e^{-x} < e^y - e^{-y}$, also $\sinh(x) < \sinh(y)$.

Wegen $e^x \to \infty$ $(x\to\infty)$ und $e^{-x}\to 0$ $(x\to\infty)$ sind

$$\lim_{x\to\infty}\cosh(x)=\lim_{x\to\infty}\tfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\infty \quad\text{und}\quad \lim_{x\to\infty}\sinh(x)=\lim_{x\to\infty}\tfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\infty\,.$$

Wegen $e^x \to 0$ $(x\to-\infty)$ und $e^{-x}\to \infty$ $(x\to-\infty)$ sind

$$\lim_{x\to-\infty}\cosh(x)=\lim_{x\to-\infty}\tfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\infty \quad\text{und}\quad \lim_{x\to-\infty}\sinh(x)=\lim_{x\to-\infty}\tfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})=-\infty\,.$$

d) Da $\cosh(0)=1$ und cosh auf $[0,\infty)$ monoton wachsend ist, gilt $\cosh([0,\infty))\subset[1,\infty)$. Aus $\cosh(0)=1$, $\cosh(2n) > \frac{e^{2n}}{2} > \frac{2n}{2} = n$ und der Stetigkeit von cosh folgt nach dem Zwischenwertsatz $[1,n]\subset\cosh([0,\infty))$ für jedes $n\in\mathbb{N}$. Daher ist

$$[1,\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[1,n]\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\cosh([0,\infty))=\cosh([0,\infty))\,.$$

Insgesamt haben wir $\cosh([0,\infty))=[1,\infty)$ gezeigt.

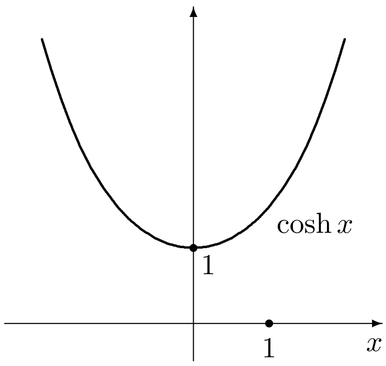
Da die Funktion cosh auf $[0,\infty)$ streng monoton ist, besitzt cosh auf $[0,\infty)$ eine Umkehrfunktion $\cosh([0,\infty))\to[0,\infty)$. Zu deren Bestimmung lösen wir die Gleichung $y=\cosh(x)$, wobei $x\in[0,\infty)$ und $y\in\cosh([0,\infty))=[1,\infty)$, nach x auf

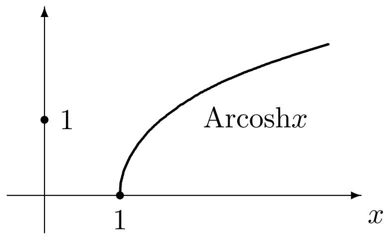
$$\begin{aligned}
y=\cosh(x) \quad&\Leftrightarrow\quad y=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad\overset{|\cdot 2e^x}{\Leftrightarrow}\quad 2e^x y = e^{2x}+1 \quad\Leftrightarrow\quad (e^x)^2-2e^x y=-1\\
&\Leftrightarrow\quad (e^x)^2-2e^x y+y^2=-1+y^2 \quad\Leftrightarrow\quad (e^x-y)^2=y^2-1\\
&\Leftrightarrow\quad |e^x-y|=\sqrt{y^2-1}\,.
\end{aligned}$$

Wegen $e^x=\frac{1}{2}(e^x+e^x)\geqslant\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\cosh(x)=y$ für $x\geqslant 0$ ist dies äquivalent zu

$$e^x-y=\sqrt{y^2-1} \quad\Leftrightarrow\quad e^x=y+\sqrt{y^2-1} \quad\Leftrightarrow\quad x=\ln\bigl(y+\sqrt{y^2-1}\bigr)\,.$$

Daher ist die Umkehrfunktion von $\cosh\colon[0,\infty)\to[1,\infty)$ gegeben durch $[1,\infty)\to[0,\infty), y\mapsto \ln\bigl(y+\sqrt{y^2-1}\bigr)$. Diese nennt man *Areacosinus* und schreibt Arcosh.





Auch auf $(-\infty, 0]$ ist cosh streng monoton, so dass es eine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion $\cosh((-\infty,0]) \to (-\infty, 0]$ gibt. Es ist $\cosh((-\infty,0]) = [1,\infty)$. Wie zuvor erhalten wir für $x \leqslant 0$ und $y \geqslant 1$ (Diesmal ist $e^x = \frac{1}{2}(e^x + e^x) \leqslant \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x) = y$)

$$\begin{aligned} y = \cosh(x) \quad &\Leftrightarrow \quad |e^x - y| = \sqrt{y^2-1} \quad \Leftrightarrow \quad -(e^x - y) = \sqrt{y^2-1} \\ &\Leftrightarrow \quad e^x = y - \sqrt{y^2-1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\bigl(y - \sqrt{y^2-1}\,\bigr)\,. \end{aligned}$$

Also hat $\cosh\colon (-\infty,0] \to [1,\infty)$ die Umkehrfunktion $[1,\infty) \to (-\infty, 0], y \mapsto \ln\bigl(y - \sqrt{y^2-1}\,\bigr)$.

Da $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist und $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (Dies kann man mit einem ähnlichen Argument wie bei cosh zeigen) gilt, existiert die Umkehrfunktion von $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche mit Arsinh (*Areasinus*) bezeichnet wird. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} y = \operatorname{Arsinh} x \quad &\Longleftrightarrow \quad x = \sinh y \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x = e^y - e^{-y} \\ &\overset{e^y \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad 2xe^y = e^{2y} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2y} - 2xe^y = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad (e^y)^2 - 2xe^y + x^2 = x^2 + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (e^y - x)^2 = x^2 + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad |e^y - x| = \sqrt{x^2+1} \quad \Longleftrightarrow \quad e^y = x + \sqrt{x^2+1} \ \text{ oder } \ e^y = \underbrace{x - \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{>|x|\geqslant x}}_{<x-x=0} \\ &\overset{e^y > 0}{\Longleftrightarrow} \quad e^y = x + \sqrt{x^2+1} \quad \Longleftrightarrow \quad y = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\,\bigr). \end{aligned}$$

Also ist $\operatorname{Arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\,\bigr)$ die Umkehrfunktion von $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

e) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \tfrac{1}{2}(e^{-i(ix)} + e^{i(ix)}) = \cos(ix)\,, \\ \sinh(x) &= \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = i\,\tfrac{1}{2i}(e^{-i(ix)} - e^{i(ix)}) = -i\sin(ix)\,. \end{aligned}$$