Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt

WS 2012/13
07.01.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

11. Übungsblatt

Aufgabe 50

Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a} \quad (a\in\mathbb{R} \text{ fest})$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

Aufgabe 51

Berechnen Sie jeweils die Menge aller $x\in\mathbb{R}$ bzw. $z\in\mathbb{C}$, in denen die Potenzreihe konvergiert.

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{(n-1)^2}(x-5)^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}(z-2i)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{n(1+(-1)^n)}x^{2n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)z^n$

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}2^k z^{k^2}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+3i)^n}{n^2}$

Aufgabe 52

Welche Funktionen $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ werden durch die folgenden Potenzreihen dargestellt?

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{(n+1)!}z^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+2}$

Aufgabe 53

Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihenentwicklung der Funktion f um die angegebene Entwicklungsstelle z_0. Wie groß ist dabei der Konvergenzradius?

a) $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto\sin z\,,\qquad z_0=1$

b) $\displaystyle f\colon\mathbb{C}\setminus\{-1,1/2\}\to\mathbb{C},\ z\mapsto\frac{1-z}{1-z-2z^2}\,,\qquad z_0=0$

c) $\displaystyle f\colon\mathbb{C}\setminus\{-1,1/2\}\to\mathbb{C},\ z\mapsto\frac{1-z}{1-z-2z^2}\,,\qquad z_0=2$

Hinweis: Benutzen Sie in **a)** das Additionstheorem für Sinus. In **b)** und **c)** hilft die Gleichung $\frac{1-z}{1-z-2z^2}=\frac{2/3}{1+z}+\frac{1/3}{1-2z}$ für alle $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1,1/2\}$ weiter.

Aufgabe 54

Die Funktionen *Cosinus hyperbolicus* und *Sinus hyperbolicus* sind definiert durch

$$\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})\,, \qquad \sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})\,.$$

a) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von cosh und sinh um 0.

b) Weisen Sie für alle $x, y \in \mathbb{R}$ nach:

i) $\cosh(-x) = \cosh(x)\,; \quad \sinh(-x) = -\sinh(x)\,;$ **ii)** $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1\,;$

iii) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\,\cosh(y) + \sinh(x)\,\sinh(y)\,;$
$\sinh(x+y) = \sinh(x)\,\cosh(y) + \cosh(x)\,\sinh(y)\,.$

c) Untersuchen Sie cosh und sinh auf Monotonie und asymptotisches Verhalten, d.h. untersuchen Sie ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$.

d) Finden Sie für die Umkehrfunktionen von cosh und sinh explizite Darstellungen auf den jeweiligen Definitionsbereichen.

e) Drücken Sie cosh und sinh durch cos und sin aus.