Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. Simon Blatt

WS 2012/13

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

14. Übungsblatt

Aufgabe 65

Wir werde induktiv zeigen, dass wenn $f, g : (a, b) \to \mathbb{C}$ n-mal differenzierbar ist auch $f \cdot g$ n-mal differenzierbar und

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

<u>$n = 1$</u>**:**

Für $n = 1$ entspricht dies genau der Aussage der Kettenregel (Satz 8, Abschnitt 13.5), da

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)} = \binom{1}{0} f'g + \binom{1}{1} fg' = f'g + fg'.$$

<u>$n \Rightarrow n + 1$</u>**:**

Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{C}$ Funktionen, die $(n + 1)$-mal differenzierbar sind. Aufgrund der Induktionsvorraussetzung wissen wir, dass $f \cdot g$ n-mal differenzierbar ist und

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

Also lässt sich die n-te Ableitung von $f \cdot g$ also Summe von Produkten differenzierbarer Funktionen schreiben und ist differenzierbar. Wir erhalten mit Hilfe der Kettenregel, der Linearität der Ableitung und der Induktionsvorraussetzung

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(n+1)} = ((f \cdot g)^{(n)})' &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)} \right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} \cdot g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} \cdot g^{((n+1)-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)} \\
&= f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} \cdot g^{((n+1)-k)} + f g^{(n+1)}
\end{aligned}$$

Zusammen mit dem Additionstheorem

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

und

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

erhalten wir damit

$$(f \cdot g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{((n+1)-k)}.$$

Aufgabe 66

Die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ ist auf $(0,\infty)$ differenzierbar. Um das Monotonieverhalten von f zu untersuchen, betrachten wir f'. Für jedes $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \begin{cases} > 0 & \text{für } x < e, \\ < 0 & \text{für } x > e. \end{cases}$$

Somit ist f auf $\begin{cases} (0,e) \\ (e,\infty) \end{cases}$ streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases}$. Für $x, y \in (0,\infty)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} x^y > y^x \quad &\iff \quad e^{y \cdot \ln(x)} > e^{x \cdot \ln(y)} \quad \overset{\text{Exp.fkt. streng mon. wachsend}}{\iff} \quad y \cdot \ln(x) > x \cdot \ln(y) \\ &\iff \quad \frac{\ln(x)}{x} > \frac{\ln(y)}{y} \quad \iff \quad f(x) > f(y)\,. \end{aligned}$$

Da $\pi > e$ und f auf (e,∞) streng monoton fallend ist, folgt $f(\pi) < f(e)$. Deshalb liefert obige Äquivalenzkette $e^\pi > \pi^e$.

Aufgabe 67

a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ist die Potenzreihe

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

absolut konvergent und damit konvergent, denn es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x|^n = \frac{1}{1-|x|} - 1\,.$$

Somit folgt für den Konvergenzradius R dieser Potenzreihe $R \geqslant 1$. Es ist damit f auf $(-1,1)$ differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ergibt sich

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x}\,.$$

Wegen

$$\big(\ln(1+x)\big)' = \frac{1}{1+x}$$

stimmen die Ableitungen von f und $x \mapsto \ln(1+x)$ überein. Daher unterscheiden sich beide Funktionen nur durch eine additive Konstante. Wegen $f(0) = 0 = \ln(1+0)$ ist diese Null und die behauptete Identität ist bewiesen.

b) Bezeichnen wir die Funktion, die durch die Reihe definiert wird, mit f (man beachte, dass f auf $(-1,1)$ wegen $\sum_{n=2}^{\infty} |(-1)^n \frac{x^n}{n^2-n}| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} |x|^n = \frac{1}{1-|x|} - 1 - |x|$ wohldefiniert ist!), so gilt für jedes $|x| < 1$

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n x^{n-1}}{n^2 - n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}\,.$$

Diese Reihe stellt laut a)-Teil die Funktion $x \mapsto \ln(1+x)$ dar, d.h. es ist $f'(x) = \ln(1+x)$. Aufgrund von $(y \ln y - y)' = \ln y$ folgt für alle $|x| < 1$

$$f(x) = (1+x)\ln(1+x) - (1+x) + c$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$. Wegen $f(0) = 0$ ergibt sich $c = 1$. Somit erhält man als Endergebnis

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2 - n} = (1 + x) \ln(1 + x) - x \,.$$

Bemerkung: Man kommt auch ohne Differenzieren aus; wegen der Darstellung

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2 - n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^n}{n-1} - \frac{x^n}{n} \right) = x \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

lässt sich der Wert direkt mit Hilfe der Logarithmusreihe aus a) ermitteln.

Aufgabe 68

Sowohl f als auch g sind stetig und auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall definiert. Daher nehmen diese Funktionen ihr Maximum und Minimum an.

i) Die Funktion f ist auf dem gesamten Intervall $[-3, 2]$ differenzierbar. In jeder Maximum- oder Minimumstelle im Innern des Intervalls verschwindet daher die Ableitung von f. Es gilt

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2) \,.$$

Die Nullstellen von f' lauten 0 und $\pm\sqrt{2}$. Wir müssen neben diesen drei Stellen (die alle im Intervall $[-3, 2]$ liegen!) auch die Ränder des Intervalls $[-3, 2]$ untersuchen: $f(0) = 2$, $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = -2$, $f(-3) = 47$, $f(2) = 2$. Das Maximum von f ist folglich 47, das Minimum ist -2.

ii) Die Funktion g ist außer in 3 differenzierbar. Wir müssen also die Randpunkte von $[0, 10]$, den Punkt 3 sowie alle Punkte im Innern von $[0, 10] \setminus \{3\}$ untersuchen, an denen die Ableitung von g verschwindet. Auf $[0, 3]$ gilt

$$g(x) = -6x + (3 - x + 2)^2 = -6x + (5 - x)^2 = x^2 - 16x + 25 \,, \qquad \text{also } g'(x) = 2x - 16 \,.$$

$g'(x) = 0$ gilt nur für $x = 8 \notin (0, 3)$. Also hat g' in $(0, 3)$ keine Nullstelle. Auf $[3, 10]$ gilt

$$g(x) = -6x + (x - 1)^2 = x^2 - 8x + 1 \,, \qquad \text{also } g'(x) = 2x - 8 \,.$$

$g'(x) = 0$ gilt nur für $x = 4 \in (3, 10)$. Wir müssen also die Punkte $0, 3, 4, 10$ untersuchen: $g(0) = 25$, $g(3) = -14$, $g(4) = -15$, $g(10) = 21$. Damit ist -15 das Minimum und 25 das Maximum von g.

Aufgabe 69

a) Wir betrachten die Funktion $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \cos\sqrt{y}$. Die Kettenregel liefert, dass f auf $(0, \infty)$ differenzierbar ist mit $f'(y) = \frac{-\sin\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}$ für alle $y > 0$. Nach dem Mittelwertsatz existiert zu jedem $x > 1$ ein $\xi_x \in (x - 1, x + 1)$ mit

$$\frac{f(x+1) - f(x-1)}{(x+1) - (x-1)} = f'(\xi_x) \,, \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}}{2} = \frac{-\sin\sqrt{\xi_x}}{2\sqrt{\xi_x}} \,.$$

Hieraus ergibt sich die Abschätzung

$$\left|\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}\right| = \left|\frac{\sin\sqrt{\xi_x}}{\sqrt{\xi_x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\xi_x}} \overset{\xi_x \in (x-1, x+1)}{\leqslant} \frac{1}{\sqrt{x-1}} \,.$$

Wegen $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0$ ist der zu bestimmende Grenzwert 0.

b) **i)** Seien $0 < y < x$. Definiere $f\colon [y,x] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t \ln t$. Dann ist f auf $[y,x]$ stetig und auf (y,x) differenzierbar mit $f'(t) = 1 \cdot \ln t + t \cdot \frac{1}{t} = 1 + \ln t$, $t \in (y,x)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (y,x)$ mit

$$x \ln x - y \ln y = (x-y) f'(\xi) = (x-y)(1+\ln \xi) \leqslant (x-y)(1+\ln x)\,,$$

weil $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist.

ii) Seien $0 < y < x$. Betrachte die Funktion $f\colon [y^2,x^2] \to \mathbb{R}$, $u \mapsto e^u$. Da f auf $[y^2,x^2]$ stetig und auf (y^2,x^2) differenzierbar ist, erfüllt f die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Danach existiert ein $\xi \in (y^2,x^2)$ mit

$$e^{x^2} - e^{y^2} = f(x^2) - f(y^2) = (x^2-y^2) f'(\xi) = \underbrace{(x-y)(x+y)}_{\geqslant 0} e^{\xi} \leqslant (x-y)(x+y)e^{x^2}$$

wegen der Monotonie der (reellen) Exponentialfunktion.

Aufgabe 70

a) Man kann zum einen direkt Satz 2 aus Abschnitt 13.2 auf $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x}$, $a = 0, b = 1$, anwenden. Dann erhält man

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{e^{-k}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{n}{k}} = \int_0^1 e^{-x}\,dx = 1 - e^{-1} = 1 - \tfrac{1}{e}\,.$$

Man kann diesen Grenzwert aber auch direkt mit Hilfe der Definition des Intgrals berechnen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{e^{-k}} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\Big) e^{-\frac{k}{n}}\,.$$

Ist $x_k^{(n)} := \frac{k}{n}$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ gesetzt, so ist $Z_n := \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\} = \{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ eine Zerlegung von $[0,1]$ und $\xi^{(n)} := (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}) = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1)$ ein zu Z_n passender Zwischenvektor. Wir definieren $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x}$ und erhalten eine Riemann-Summe $\sigma_f(\xi^{(n)}, Z_n) := \sum_{k=1}^n (x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) f(x_k^{(n)}) = \sum_{k=1}^n (\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}) e^{-\frac{k}{n}}$. Da f als stetige Funktion über $[0,1]$ integrierbar ist und da $|Z_n| = \frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt, ergibt sich aus der Definition des Integrals

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{e^{-k}} = \lim_{n\to\infty} \sigma_f(\xi^{(n)}, Z_n) = \int_0^1 f\,dx = \int_0^1 e^{-x}\,dx = 1 - e^{-1} = 1 - \tfrac{1}{e}\,.$$

b) Hier betrachten wir die Zerlegung $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 3\}$ des Intervalls $[0,3]$ und den passenden Zwischenvektor $\xi^{(n)} := (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 3)$. Erneut konvergiert die Feinheit von Z_n für $n \to \infty$ gegen Null. Mit der Funktion $g\colon [0,3] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(\pi x)$ gilt aufgrund der Definition des Integrals

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{3n} \sin\big(\tfrac{k\pi}{n}\big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{3n} \Big(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\Big) \sin\big(\tfrac{k\pi}{n}\big) = \lim_{n\to\infty} \sigma_g(\xi^{(n)}, Z_n) = \int_0^3 g\,dx$$
$$= \int_0^3 \sin(\pi x)\,dx = \frac{1 - \cos(3\pi)}{\pi} = \frac{2}{\pi}\,.$$

Bemerkung: Auch dieses Ergebnis erhält man wie in Teil (i) etwas schneller mit Hilfe Satz 2, Abschnitt 13.2, aus der Vorlesung.