Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. S. Blatt

WS 2012/13
26.01.2013

Übungsklausur

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 ((4+3+3) Punkte)

a) Mit $\varphi \in \mathbb{R}$, fest, kann die Gerade g, auf der z, w, v liegen, so dargestellt werde:

$$g: \qquad z(t) = z + t \cdot e^{i\varphi}, t \in \mathbb{R}.$$

Da $w, v \in g$ und w, v, z verschieden gibt es $t_1 \neq t_2 \neq 0$ so, dass

$$w = z + t_1 e^{i\varphi} \qquad v = z + t_2 e^{i\varphi}.$$

Also

$$\frac{v-z}{w-z} = \frac{t_2 e^{i\varphi}}{t_1 e^{i\varphi}} = \frac{t_2}{t_1} \in \mathbb{R}$$

und damit

$$Im\left(\frac{v-z}{w-z}\right) = 0.$$

b) Da $z^4 + 2iz^2 - 1 = (z^2+i)^2$, gilt

$$0 = z^4 + 2iz - 1 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = -i = e^{i\frac{3\pi}{2} + ik2\pi},\ k = 0, 1.$$

Also sind

$$z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}\ (k=0), \quad z_2 = -e^{i\frac{3\pi}{4}}\ (k=1)$$

die einzigen Lösungen dieser Gleichung.

c) Es gilt

$$z = -5 + i\sqrt{75} \overset{\sqrt{75}=5\sqrt{3}}{=} 5(-1 + i\sqrt{3}) = 10\left(-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

Also ist $|z| = 10$. Aus $\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$ schließen wir $\sin(\pi/3) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und bekommen mit Hilfe von

$$\cos(2\pi/3) = \cos(\pi - \pi/3) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

und

$$\sin(2\pi/3) = \sin(\pi - \pi/3) = -\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

dass

$$arg(z) = \frac{2\pi}{3}.$$

Also

$$z = 10e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Aufgabe 2 ((4+6) Punkte)

a) Ausmultiplizieren ergibt

$$(\sqrt{ac}+\sqrt{bd})^2 = ac + 2\sqrt{acbd} + bd.$$

Mit der Ungleichung "geometrisches-arithmetisches Mittel" gilt

$$2\sqrt{acbd} \leqslant bc + ad.$$

Also

$$(\sqrt{ac}+\sqrt{bd})^2 \leqslant ac + bc + ad + bd = (a+b)(c+d).$$

b) Geht ohne Schwierigkeiten direkt mit vollständiger Induktion. Wir gehen etwas anders vor. Es wird die zu beweisende Aussage zunächst mit eine äquivalenten Umformung vereinfacht. Mit $\sum_{j=1}^{k} j = \frac{k}{2}(k+1)$ ist die Behauptung gleichbedeutend mit

$$(k+1)\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} \geqslant 2k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dies wird mit einer vollständigen Induktion bewiesen.

Induktionsanfang: $k = 1$ Wegen $2 \geqslant 2$ stimmt die Aussage für $k = 1$.

Induktionsschluss: $k \Rightarrow k+1$**:**

Voraussetzung: $(k+1)\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} \geqslant 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Behauptung: $(k+2)\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{j} \geqslant 2(k+1)$.

Beweis:

$$\begin{aligned}(k+2)\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{j} &= (k+1)\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} + \frac{1}{k+1}\right) + \underbrace{\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{j}}_{\geqslant 1} \\ &\geqslant (k+1)\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} + 1 + 1 \overset{\text{Ind. Vor.}}{\geqslant} 2k+2 \\ &= 2(k+1).\end{aligned}$$

Aufgabe 3 ((6+4) Punkte)

a) Wir möchten den Konvergenzradius mit Hilfe des Wurzelkriteriums bestimmen. Zu diesem Zweck berechnen wir $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ wobei

$$a_n := \frac{10^{2n}}{2^{2n} + 3^{2n}}.$$

mit Hilfe des Sandwich-Kriteriums.

Da die n-te Wurzel positiver Zahlen streng monoton wachsend ist und $2^{2n}+3^{2n} \leqslant 2\cdot 3^{2n}$ gilt

$$\sqrt[n]{\frac{10^{2n}}{2^{2n}+3^{2n}}} \leqslant \sqrt[n]{\frac{10^{2n}}{3^{2n}}} = \left(\frac{10}{3}\right)^2.$$

Andererseits gilt

$$\sqrt[n]{\frac{10^{2n}}{2^{2n}+3^{2n}}} \geqslant \sqrt[n]{\frac{10^{2n}}{2\cdot 3^{2n}}} = \frac{10^2}{\sqrt[n]{2}\cdot 3^2} \xrightarrow{n\to\infty} \left(\frac{10}{3}\right)^2$$

Das Sandwichkriterium liefert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{10}{3}\right)^2.$$

Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-2)^n$ lautet

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}} = \left(\frac{3}{10}\right)^2 = 0,09.$$

Damit konvergiert die Reihe für alle Punkte $x \in (1,91,\ 2,09)$ und divergiert für alle $x \in (-\infty, 1,91) \cup (2,09,\infty)$.

Für $x = 1,91$ erhalten wir die alternierende Reihe

$$\sum_{n\to\infty} \frac{10^{2n}}{2^{2n}+3^{2n}}(-1)^n \frac{3^{2n}}{10^{2n}} = \sum_{n\to\infty} (-1)^n \frac{3^{2n}}{2^{2n}+3^{2n}}$$

und für $x = 2,09$ die Reihe

$$\sum_{n\to\infty} \frac{10^{2n}}{2^{2n}+3^{2n}} \frac{3^{2n}}{10^{2n}} = \sum_{n\to\infty} \frac{3^{2n}}{2^{2n}+3^{2n}}$$

Da

$$\frac{3^{2n}}{2^{2n}+3^{2n}} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

bilden die Reihenglieder dieser Reihen keine Nullfolgen. Daher divergieren die beiden Reihen.

Also konvergiert die Reihe $a_n(x-2)^n$ in x genau dann, wenn $x \in (1,91, 2,09)$.

b) Es ist bekannt, dass für alle $x \in (-1,1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

wobei die Reihe absolut konvergiert. Außerdem gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

und auch diese Reihe konvergiert absolut. Mit Hilfe des Cauchy-Produktes erhalten wir für $x \in (-1, 1)$

$$\frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

wobei

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} \cdot \frac{x^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{n} 1 \cdot \frac{1}{k!} \right) x^n.$$

Also

$$\frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) x^n$$

für alle $x \in (-1, 1)$.

Aufgabe 4 ((6+4) Punkte)

a) Mit Hilfe der Sinusreihe

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

und der Cosinusreihe

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{x}{\sin x}\right) &= \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \cos(x)\sin(x)} \\
&= \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)}{x^2 \cos x \left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{4!}\right)x^5 + \cdots}{\cos(x)\left(x^3 - \frac{x^5}{3!} + \cdots\right)}
\end{aligned}$$

Indem wir x^3 kürzen, erhalten wir

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{x}{\sin x}\right) = \frac{\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{4!}\right)x^2 + \cdots}{\cos(x)\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots\right)} \xrightarrow{x \to 0} \frac{\frac{1}{3}}{\cos(0)1} = \frac{1}{3}.$$

wobei wir die Stetigkeit von cos und der vorkommenden Potenzreihen im Punkt 0 ausnutzen.

b) Wir betrachten die Funktion $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := x^2$. Da diese Funktion stetig ist, ist sie auch integrierbar. Wählen wir die Zerlegung $Z_n = \{z_k | z_k = \frac{n+k}{n}, k = 0, \ldots n\}$ des Intervalls $[1, 2]$ und die Stützstellen $\xi_k = \frac{n+k}{n}$ für $k = 1, \ldots n$ so erhalten wir für die zugehörige Zwischensumme

$$\sigma(f, Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k)^2}{n^2} \underbrace{\left(\frac{n+k}{n} - \frac{n+(k-1)}{n}\right)}_{=\frac{1}{n}} = \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 + \cdots + (2n)^2}{n^3}.$$

Für die Feinheit der Zerlegung Zerlegung gilt $\|Z_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Aus der Definition des Integrals erhalten wir damit

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 + \cdots + (2n)^2}{n^3} &= \lim_{n\to\infty} \sigma(f, Z_n) == \lim_{\|Z\|\to 0} \sigma(f, Z) \\ &= \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}\left(2^3 - 1^3\right) = \frac{7}{3}.\end{aligned}$$