Kurze Zusammenfassung Freitag 06.02.2015

14.14. Lösungsalgorithmus Seien $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ gegeben. Zur Lösung erweitern wir die Matrix A um $\vec{b}$ als $(m+1)$-te Spalte, betrachten also $(A\,|\,\vec{b}) \in \mathbb{K}^{n\times(m+1)}$. Für $A = (a_{jk})$ und $\vec{b} = (b_j)$ ist

$$(A\,|\,\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

Wir werden Zeilenumformungen verwenden. Die Zeilenumformungen ändern nicht die Lösungsmenge des Systems.

Algorithmus (Eliminationsverfahren nach Gauß):
(1) Matrix A um $\vec{b}$ als letzte Spalte erweitern.
(2) Die erweiterte Matrix $(A\,|\,\vec{b})$ durch Zeilenumformungen auf ZNF (oder ZSF) bringen.
(3) Lösbarkeit und Lösung ablesen.

Algorithmus Schritt (3), Ablesen der Lösbarkeit: Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ist **nicht lösbar** genau dann, wenn eine ZSF von $(A\,|\,\vec{b})$ die Form $C = (c_{jk}) \in \mathbb{K}^{n\times(m+1)}$ hat und es ein $j \in \{1,\dots,n\}$ gibt mit $c_{jk} = 0$ für $k = 1,\dots,m$ und $c_{j,m+1} \neq 0$.

Algorithmus Schritt (3), Ablesen der Lösung: Für alle Spalten mit der Eigenschaft, dass kein Element von ihnen das erste nicht Null Element seiner Zeile ist, setzen wir den zugohörigen unbekannten als freien Parameter. Dann lösen wir auf bezüglich der anderen unbekannten.

Um den Kern einer Matrix A zu bestimmen lösen wir die Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$ mit dem Lösungsalgorithmus von Gauß. Um das Bild einer Matrix zu bestimmen
(1) Wir schreiben das zugehörige System wo die rechte Seite Parameter sind.
(2) Mit dem Algorithmus von Gauß bestimmen wir Bedingungen für die Lösbarkeit.
Den Kern kann man alternativ mit dem -1 Ergänzung Trick bestimmen und zwar
(1) Man bringt die Matrix A in Zeilennormalform.
(2) Man streicht die Zeilen die Null sind (wenn es solche Zeilen gibt)
(3) Man ergänzt die Matrix mit Zeilen deren Elemente Null sind, bis auf ein Element das -1 ist. Die Ergänzung wird so gemacht, damit die diagonalen Elemente der Matrix nur 1 und -1 sind.
(4) Der Kern ist der lineare Aufspann der Spalten der ergänzten -1.

Dimensionsformel Für eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ gilt $\dim \mathrm{Kern}\, A + \dim \mathrm{Bild}\, A = n$.
Rang Wir definieren den <u>Rang</u> einer Matrix durch $\mathrm{Rang} A = \dim \mathrm{Bild}\, A$.
Satz Die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ ist lösbar $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Rang} A = \mathrm{Rang}(A|\vec{b})$.
14.17. Lineare Abbildungen Seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume.

Definition: Eine Abbildung $\phi : V \to W$ heißt <u>linear</u>, (bzw. genauer $\mathbb{K}$-*linear*), falls für alle $x, y \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y), \quad \phi(\alpha x) = \alpha\phi(x).$$

Für ein solches ϕ heißt

$$\mathrm{Kern}\, \phi := \{x \in V : \phi(x) = 0\}$$

der *Kern von* ϕ und

$$\mathrm{Bild}\, \phi := \{\phi(x) : x \in V\}$$

heißt *Bild von* ϕ.

Satz: Sei $\phi : V \to W$ linear. Dann gilt:
(1) $\mathrm{Kern}\, \phi$[bzw. $\mathrm{Bild}\, \phi$] ist ein Unterraum von V[bzw. W].
(2) ϕ ist injektiv $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Kern}\, \phi = \{0\}$.