Kurze Zusammenfassung Montag 12.01.2015 (Bemerkung: Die Zahlen der Art z.B. 10.14 sind Bezug im Skript.)

Satz 0.1 (10.14 Ableitung von Potenzreihen)**.** *Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R \in (0,\infty]$, $I := (x_0 - R, x_0 + R)$ *und*

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Dann ist f *auf* I *differentierbar (insbesondere stetig), und* $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} \quad \forall x \in I$.

Die Gleichung $z^n = c, c \in \mathbb{C}$ Um die Gleichung zu lösen schreibt man c in Polarkoordinaten ($c = re^{i\phi}$) und benutzt man den Folgenden Satz

Satz 0.2. *Die Lösungen von* $z^n = re^{i\phi}$ *sind:* $z_j = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{(2j\pi+\phi)}{n}}, j = 0, 1, ..., n-1$.

11.1 Definition des Riemann Integrals

Im Rest der Vorlesung sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, d.h. das Bild $f([a,b]) = \{f(x) : x \in [a,b]\}$ von f ist beschränkt.

Ober- und Untersummen, oberes und unteres Integral

Definition 1. $Z := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *heißt eine Zerlegung von* $[a,b]$, *falls* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Sei $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Für $j = 1, 2, \ldots, n$ setze

$$I_j \;:=\; [x_{j-1}, x_j], \quad |I_j| := x_j - x_{j-1}, \quad m_j := \inf f(I_j), \quad M_j := \sup f(I_j).$$

$s_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} m_j |I_j| \left[S_f(Z) := \sum_{j=1}^{n} M_j |I_j| \right]$ heißt Untersumme [Obersumme] von f bzgl. Z

Sei $m := \inf f([a,b])$ und $M := \sup f([a,b])$.

Satz 0.3. *Seien* Z_1, Z_2 *Zerlegungen.*

(1) Es gilt $m(b-a) \leq s_f(Z_1) \leq S_f(Z_2) \leq M(b-a)$.

(2) Ist $Z_1 \subseteq Z_2$, *so gilt* $s_f(Z_1) \leq s_f(Z_2) \leq S_f(Z_2) \leq S_f(Z_1)$.

Definition 2. $s_f := \sup\{s_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\}$(*unteres Integral von* f *über* $[a,b]$)

$S_f := \inf\{S_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\}$(*oberes Integral von* f *über* $[a,b]$).

Es gilt $m(b-a) \leq s_f \leq S_f \leq M(b-a)$.

Riemann Integrierbarkeit, Riemann Integral

Definition 3 (11.2)**.** f *heißt (Riemann-)*integrierbar *(*ib*), falls* $s_f = S_f$ *gilt.*

In diesen Falle heißt

$$\int_a^b f\,dx := \int_a^b f(x)\,dx := S_f (= s_f)$$

*das (Riemann-)*Integral *von* f *über* $[a,b]$.

Definition 4. $R[a,b] := \{g : [a,b] \to \mathbb{R} : g \text{ beschränkt und integrierbar}\}$

Kurze Zusammenfassung Dienstag 13.01.2015

Für eine Zerlegung Z (Notation gleich wie gestern), definieren wir

$$\|Z\| := \max\{|I_j| : j = 1, 2, \dots, n\} \text{ (\underline{Feinheit von Z})}.$$

Ein n-Tupel $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ heißt passender Zwischenvektor, wenn $\xi_j \in I_j$ für jedes $j = 1, \dots, n$ gilt. Für einen solchen ξ heißt

$$\sigma_f(Z, \xi) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)|I_j|$$

eine Riemannsche Summe. Wegen $m_j \le f(\xi_j) \le M_j$ gilt dabei $s_f(Z) \le \sigma_f(Z, \xi) \le S_f(Z)$.

Satz 0.4 (11.7)**.** *Sei $f \in R[a, b]$ und $(Z_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen mit $\|Z_l\| \to 0$, sowie $(\xi^{(l)})$ eine Folge von passenden Zwischenvektoren. Dann gilt*

$$\lim_{l\to\infty} \sigma_f(Z_l, \xi^{(l)}) = \int_a^b f\,dx.$$

Bemerkung 1. *Der Satz beschreibt wie ein Integral approximiert werden kann (z.B. mit Computer). Das ist nützlich, wenn es unmöglich ist das Integral explizit zu berechnen.*

11.3,11.5,11.8 Eigenschaften des Riemann Integrals

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$ für alle $x \in [a, b]$ dann $f \in R[a, b]$ und $\int_a^b f\,dx = c(b - a)$.
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f integrierbar, d.h. $f \in R[a, b]$.

Seien $f, g \in R[a, b]$. Dann

(1) Gilt $f \le g$ auf $[a, b]$, so ist $\int_a^b f\,dx \le \int_a^b g\,dx$.

(2) $fg \in R[a, b]$ und für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$ und

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx.$$

(3) $|f| \in R[a, b]$ und $\left|\int_a^b f\,dx\right| \le \int_a^b |f|\,dx$ (Dreiecksungleichung für Integrale).

(4) Wenn $a < c < b$ dann $f \in R[a, c]$, $f \in R[c, b]$ und $\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$.

Im Rest der Vorlesung ist I ein Intervall.

Definition 5 (11.11)**.** *Sind $f, F : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, wobei F auf I differenzierbar ist mit $F' = f$ auf I, so heißt F eine* Stammfunktion von f auf I.

Satz 0.5 (11.10 **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.*
(1) $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) := \int_a^x f(\xi)\,d\xi$ ist eine Stammfunktion von f auf $[a, b]$.
(2) Ist $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f auf $[a, b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) \quad \left(=: G(x)\Big|_a^b =: [G(x)]_a^b\right).$$

Für eine Stammfunktion von f schreibt man auch $\int f(x)dx$ (unbestimmtes Integral).

Satz 0.6 (11.12 **Partielle Integration**)**.** *Seien $f, g \in C^1(I)$. Dann gilt*

$$\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx \quad \text{auf } I.$$

Ist $I = [a, b]$, so gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$