<u>ACHTUNG</u>: am Dienstag den 16. Dezember findet die Vorlesung ausnahmsweise im kleinen HS Geb. 10.50 statt.

kurze Zusammenfassung Montag 15.12.2014 Am Anfang werden wir die Polar Koordinaten für die komplexen Zahlen beibringen (siehe Zusammenfassung der letzten Woche)

Cosinus hyperbolicus, Sinus hyperbolicus, Areacosinus hyperbolicus

Für $x \in \mathbb{R}$ sei:

$$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \qquad \sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Dann $\quad \cosh 0 = 1, \sinh 0 = 0,\ \cosh(-x) = \cosh x\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sinh(-x) = -\sinh x\ \forall x \in \mathbb{R},$

$$\lim_{x\to\infty} \cosh x = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \sinh x = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \cosh x = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty.$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\cosh : [0,\infty) \to [1,\infty)$ ist streng monoton wachsend stetig und bijektiv, und ebenso ihre Umkehrabbildung $Arcosh : [1,\infty) \to [0,\infty)$ (Areacosinus hyperbolicus).

Differentialrechnung

Im Rest des Textes ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall [1].

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$.

Definition 1. *f heißt in $x_0 \in I$* differenzierbar ***(dbar)**, falls der Limes* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *existiert in $\mathbb{R}$. Dieser Grenzwert heißt* die Ableitung von f in x_0. *Bezeichnung: $f'(x_0)$.*

Die Funktion f heißt auf I differenzierbar, *falls f in jedem $x \in I$ differenzierbar ist.*

Bemerkung 1. *Es ist* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Satz 0.1. *Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.*

Satz 0.2 (Abbleitungsregeln). *(a) Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $x_0 \in I$ differenzierbar sind, und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(1) $\alpha f + \beta g$ ist differenzierbar in $x_0 \in I$ und

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).$$

(2) fg ist differenzierbar in x_0 und

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \qquad \text{Produktregel.}$$

(3) Ist $g(x_0) \neq 0$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in J := I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Die Funktion $\frac{f}{g} : J \to \mathbb{R}$ ist in x_0 differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \qquad \text{Quotientenregel.}$$

(b) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar und $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $f(I) \subseteq J$. Sei $g : J \to \mathbb{R}$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \qquad \text{Kettenregel.}$$

[1] Aber kein Intervall der Form [a,a]={a}.

<u>ACHTUNG</u>: am Dienstag den 16. Dezember findet die Vorlesung ausnahmsweise im kleinen HS Geb. 10.50 statt.

kurze Zusammenfassung Dienstag 16.12.2014

Satz 0.3 (**Satz über die Umkehrfunktion**). *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton auf I. Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Definition 2. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in I$ ein* lokales Maximum *[bzw.* Minimum*], falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass*

$$\forall x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ gilt } f(x) \leq f(x_0) \quad [\text{ bzw. } f(x) \geq f(x_0)].$$

Ein relatives *oder* lokales Extremum *ist ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum* [2].

Bemerkung 2. *Ein Extremum (Maximum oder Minimum) einer Funktion, ist auch ein lokales Extremum der Funktion.*

Satz 0.4. *Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in I$ ein lokales Extremum und sei in x_0 differenzierbar. Gibt es ein $\delta > 0$ mit $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$, so ist $f'(x_0) = 0$.*

Korollar 0.5. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wenn f differentierbar ist auf (a, b), dann*

$$\max f := \max f([a, b]) = \max f(\{a, b\} \cup A)$$

$$\min f := \min f([a, b]) = \min f(\{a, b\} \cup A),$$

wobei $A = \{x \in (a, b)$ mit $f'(x) = 0\}$.

Satz 0.6. ***Mittelwertsatz der Differentialrechnung (MWS)*** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Folgerungen Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbar.
(1) f ist auf I konstant $\Leftrightarrow$ $f' = 0$ auf I.
(2) Ist $f' = g'$ auf I, so gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f = g + c$ auf I.
(3) Ist $f' \geq 0$ [bzw. $f' \leq 0$, $f' > 0$, $f' < 0$] auf I, so ist f auf I monoton wachsend [bzw. monoton fallend, streng monoton wachsend, streng monoton fallend].

[2] In dieser Definition kann I ersetzt werden durch eine Menge die kein Intervall ist.