Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I.Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

WS 2014/15
28.11.2014

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

6. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ **e)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+(-1)^n}$ **f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

Aufgabe 2

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $a_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ und $b_n := \dfrac{\left(1+\frac{1}{2}(-1)^n\right)^n}{n^2}$.

a) Beweisen Sie: Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ divergent ist.

c) Warum ist das Leibnizkriterium hier nicht anwendbar?

d) Was kann man mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sagen? Und was liefert das Wurzelkriterium?

Aufgabe 3

Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiere $a_n := \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dass aber das Cauchyprodukt der Reihe mit sich selbst divergiert.

Bemerkung: Dies ist ein Beispiel dafür, dass das Cauchyprodukt zweier konvergenter Reihen nicht konvergieren muss, wenn beide Reihen nicht absolut konvergieren.

Aufgabe 4

Berechnen Sie für $q \in (0,1)$ den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)q^n.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst das Cauchyprodukt von $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit sich selbst. Bilden Sie dann das Cauchyprodukt dieser Reihe mit $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + - \dots$$

konvergiert, die daraus durch Umordnung entstehende Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + + - \dots$$

jedoch divergiert.